Liceo Scientifico Statale "Leonardo Da Vinci"

Via Possidonea 14, Reggio Calabria – Tel. 0965 – 29911

www.liceovinci.rc.it

Progetto Quaderni di Matematica e Fisica a. s. 2005 – 2006

" Il Principio di indeterminazione "

Prof. Fabrizio Tone

Email : fabrizio.tone@alice.it

" La mente intuitiva è un dono sacro,
la mente razionale è un fedele servo.
Noi abbiamo creato una società che
onora il servo e ha dimenticato il dono."

"A mia madre per motivi evidenti,
a chiunque la conosce
e per le attenzioni costanti
nei miei riguardi "

Fabrizio Tone

Il principio di indeterminazione di Heisenberg.

Una presentazione canonica

Nel 1927 il fisico tedesco Werner Heisenberg scoprì che la natura probabilistica delle leggi della Meccanica Quantistica poneva grossi limiti al nostro grado di conoscenza di un sistema atomico. Normalmente ci si aspetta che lo stato di una microparticella in movimento (consideriamo ad esempio un elettrone in rotazione attorno al nucleo) sia caratterizzato completamente ricorrendo a due parametri: velocità e posizione. Heisenberg postulò invece, che da un certo punto in poi, procedendo verso l'infinitamente piccolo, queste quantità sarebbero dovute rimanere **sempre indefinite**. Tale limitazione prese il nome di *Principio di Indeterminazione*. Questo principio afferma che:

maggiore è l'accuratezza nel determinare la posizione di un particella, minore è la precisione con la quale si può accertarne la velocità e viceversa (*).

Quando si pensa all'apparecchiatura necessaria per eseguire le misurazioni, questa indeterminazione risulta intuitiva. I dispositivi di rilevazione sono così grandi che la misurazione di un parametro come la posizione è destinato a modificare la velocità. Occorre sottolineare però che le limitazioni in parola, non derivano solo dall'invasiva interazione del mondo macroscopico sul mondo microscopico, **ma sono proprietà intrinseche (ontologiche) della materia**. **In nessun senso si può ritenere che una microparticella possieda in un dato istante una posizione e una velocità.**

(*) Più precisamente nella misura simultanea delle coordinate x e della quantità di moto p_x di una particella è **impossibile** ottenere valori x' e p' con indeterminazione piccola a piacere. Infatti, se Δx e Δp_x denotano rispettivamente l'indeterminazione in x e p_x, deve esistere la relazione:

Il Principio di Indeterminazione

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar = \frac{h}{4\pi}$$

In modo analogo, in base al principio di indeterminazione è impossibile mediante una osservazione che duri un tempo Δt determinare l'energia di una particella con un'incertezza inferiore a ΔE, legata a Δt dalla relazione : $\Delta E \cdot \Delta t \approx h$

Questa ultima relazione dimostra che in nessun senso si può ritenere che una microparticella possieda in un dato istante una energia definita (Rif. indeterminazione Energia-Tempo).

Si noti infine che il Principio di Indeterminazione è valido per qualsiasi "oggetto", ma in pratica ha conseguenze importanti solo se applicato a particelle di dimensioni atomiche o subatomiche, perché quando si tratta di corpi ordinari, data la piccolezza della costante *h* esso perde gran parte del suo significato.

L'indeterminazione dal punto di vista sperimentale

Per misurare la POSIZIONE di un oggetto microscopico come un elettrone occorre investirlo con un raggio di luce (fotoni) o comunque qualcosa che in ultima analisi risulta avere all'incirca le **medesime dimensioni dell'elettrone**. Questo fa si che l'elettrone **risulti perturbato** da questa interazione che ne modifica inesorabilmente la velocità.

La stessa cosa, ma in situazioni opposte, avviene nel caso in cui si voglia conoscere la VELOCITA' di un elettrone ...

Secondo Heisenberg l'effetto dell'interazione tra il raggio di luce incidente e la particella "osservata" può anche essere reso uguale a zero, in tal caso però non si compie alcuna misurazione e non si acquista alcuna conoscenza sulle proprietà del sistema osservato. Se l'interazione è invece diversa da zero, **essa non può essere resa arbitrariamente piccola** e **non è quindi neppure concettualmente**

eliminabile, ma deve avere la **costante di Planck come valore minimo**. Questo perché ogni interazione fisica tra strumento misuratore e micro-oggetto misurato implica sempre uno scambio di energia per un certo intervallo di tempo, oppure la cessione di una certa quantità di moto su una certa distanza spaziale. Ora le dimensioni fisiche di "energia per tempo" e di "quantità di moto per spazio" sono proprio quelle dell'**azione**, sono cioè quelle della costante (***h***) di Planck. Il termine **interazione** usato per ogni processo quantistico di misurazione è quindi vero letteralmente, dato che si ha proprio a che fare con lo scambio della grandezza fisica azione fra lo strumento e il sistema fisico misurato, che a causa delle dimensioni atomiche di questo ultimo, comporta su di esso una inevitabile perturbazione ...

Un esempio di indeterminazione sperimentale può essere il tentativo di determinazione simultanea della TRAIETTORIA e della POSIZIONE di un oggetto in movimento :

Si supponga di voler determinare, per mezzo di una fotografia, la POSIZIONE di un oggetto in movimento: per esempio una palla di cannone. Naturalmente se la palla percorre la propria parabola a notevole velocità, la fotografia risulterà mossa a meno che si usi un otturatore ad alta velocità.

Più l'oggetto risulterà "fermato", più velocemente sarà scattato l'otturatore. Ma in questo caso si sarà pagato un prezzo nella definizione della traiettoria; risultando la palla di cannone ferma. D'altro canto usando un otturatore a bassa velocità, si fotograferà una linea indistinta che rappresenta fedelmente la TRAIETTORIA della palla, ma che non da nessuna indicazione sulla posizione.

In conclusione più si tenta di definire la traiettoria dell'oggetto più si perde informazione sulla posizione e viceversa.

L'indeterminazione dal punto di vista teorico

<u>Il Principio di Indeterminazione</u>

Come dianzi specificato il fatto che non si riesca a misurare contemporaneamente la velocità e la posizione di una particella non è dovuto soltanto a restrizioni di ordine pratico, ma è un limite obiettivo della natura. In altri termini la particella allo "stato naturale" <u>NON HA OGGETTIVAMENTE</u> (ontologicamente) una velocità e una posizione. Questo nasce essenzialmente dalla natura ondulatorio-corpuscolare della materia. **NASCE DAL FATTO DI DOVER METTERE INSIEME ONDE E CORPUSCOLI PER LA RAPPRESENTAZIONE DI UNA STESSA ENTITA'.**

<u>I fenomeni ondulatori</u> :

Un'onda è un ente che vibra nello spazio e nel tempo. Possiamo osservarla in un dato istante di tempo e allora vediamo una figura periodica nello spazio come nell'esempio di figura A.

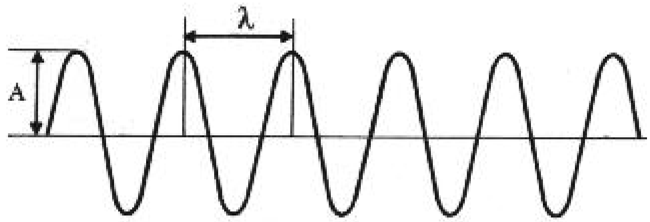


Figura A

Questa forma d'onda è caratterizzata da un'ampiezza **A** (l'estensione della vibrazione), da una lunghezza d'onda λ (la distanza tra due creste) e da una frequenza ν, cioè dal numero di oscillazioni (per coprire la lunghezza λ) compiute nell'unità di tempo.

Come precedentemente visto, de Broglie ha stabilito che ogni grano di energia, luce o materia, possiede una natura ondulatoria. L'informazione sullo stato di moto di una particella è contenuta nella lunghezza d'onda e nella frequenza. La lunghezza d'onda è inversamente proporzionale alla quantità di moto della particella ($\boldsymbol{\lambda = h/p}$). [il che significa che un'onda con piccola lunghezza d'onda corrisponde a una particella che si muove con una grande quantità di moto (e quindi con elevata velocità)]. La quantità di moto ***p,*** sarà ovviamente, uguale a ***h/λ .*** La frequenza dell'onda sarà infine proporzionale all'energia della particella. Un'onda con frequenza elevata indica che la particella ha grande energia (infatti **E = *h ν***).

Schrödinger, con la sua celebre equazione, ha stabilito che una particella può occupare tutte le ***possibili*** posizioni (le ***"possibili posizioni"*** di Schrödinger diventano ***"probabili posizioni"*** per Born ...) all'interno dell'onda associata (o **pacchetto d'onda ...)**, che dovrà avere estensione limitata nello spazio.

La rappresentazione visiva di un pacchetto d'onda che ha un inizio e una fine può essere raffigurato come il passaggio di un treno di onde che comincia all'istante t_1 e finisce all'istante t_2 (vedere la Figura B).

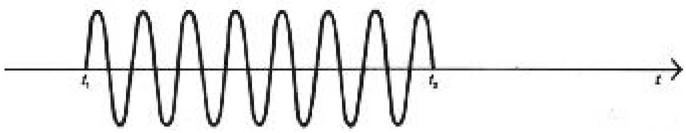


Figura B

L'effetto di questo treno di onde limitato può essere rappresentato mediante una "sinusoide troncata", la cui ampiezza è nulla per $t < t_1$ e per $t > t_2$. Nell'intervallo ($t_1; t_2$) l'ampiezza non è d'altronde necessariamente come nella figura B anzi, sia la meccanica ondulatoria sia la meccanica quantistica concordano che essa dovrà presentare un massimo al centro t_0 dell'intervallo t_1 t_2 e un decremento progressivo verso le estremità t_1 e t_2 (vedere la Figura C).

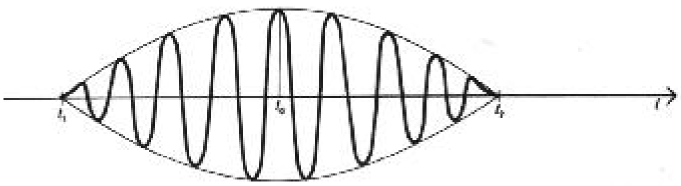


Figura C

All'inizio del XIX secolo il matematico francese Fourier dimostrò che nell'uno e nell'altro caso si può rappresentare analiticamente tale sinusoide troncata come ***un insieme di sinusoidi indefinite***, la cui pulsazione ω varia in maniera continua su un intervallo $\Delta\omega$ intorno a ω_0. Questo intervallo di pulsazione $\Delta\omega$ è legato all'intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ dalla relazione : $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 2\pi$.

Fourier ha dimostrato che è sempre possibile scegliere le ampiezze e le fasi di queste onde componenti in modo tale che la loro sovrapposizione dia un'ampiezza risultante nulla al di fuori dell'intervallo t_1 t_2 -per interferenza distruttiva- e che all'interno di questo intervallo l'ampiezza risultante vari nel modo desiderato - per interferenza costruttiva- (vedere la Figura D).

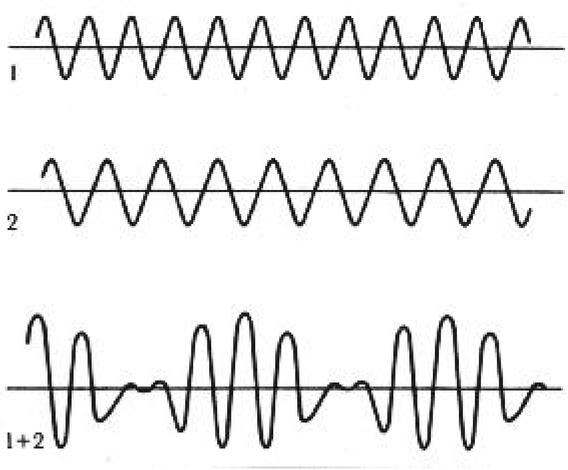


Figura D

Interferenza di onde. Quando si hanno due sorgenti [diverse] di onde elettromagnetiche, ad esempio due sorgenti luminose, l'intensità luminosa misurata in un dato punto non è necessariamente uguale alla somma delle intensità provenienti dalle due sorgenti, ma può essere maggiore o minore. Questo fenomeno può essere spiegato facilmente con l'interferenza delle onde emesse dalle due sorgenti : nei punti in cui si sovrappongono due creste avremo un'intensità luminosa maggiore della somma delle singole intensità. Laddove si sovrappongono una cresta e un ventre avremo un'intensità minore. Il valore esatto dell'interferenza può essere calcolato facilmente. Fenomeni di interferenza di questo tipo si possono osservare ogni volta che si ha a che fare con la radiazione elettromagnetica. La Figura E infine, mette in chiara evidenza come la curva risultante dalle curve 1 e 2 della Figura D sia formata da una banda di onde di lunghezza differente (risultanti da un annullamento reciproco al di fuori della regione di ampiezza Δx e da un rinforzo reciproco nel suo interno).

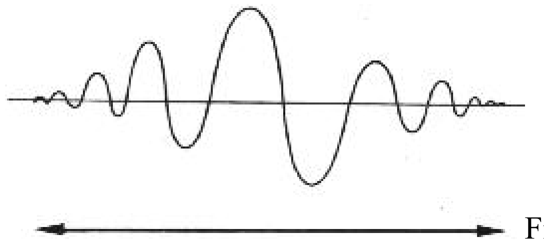


Figura E

Δx

Appare chiaro ora che qualora si voglia definire la POSIZIONE di una particella all'interno del pacchetto d'onda (all'interno della curva di Figura E), bisognerà confinare la particella in una "ristrettissima" regione di spazio, la qual cosa seguendo Fourier si ottiene ***sovrapponendo insieme molte onde di lunghezza d'onda differente***.

Ma come ci insegna de Broglie lunghezza d'onda è quantità di moto (VELOCITÀ) sono strettamente collegate e quindi se aumenta il numero degli "enti onda" di differente lunghezza considerati, aumenta anche il numero delle quantità di moto dell'insieme. In definitiva se per definire meglio la posizione di una particella occorre aumentare il numero delle onde (di diversa λ) all'interno del pacchetto d'onda, dovrà aumentare anche il "numero" delle quantità di moto e quindi anche della velocità del pacchetto d'onda ...

Dal confronto delle curve di Figura F, si vede chiaramente che per confinare in un volume più piccolo la particella, occorre comprimere il pacchetto d'onda (curva inferiore). Tale "compressione" può avvenire soltanto a spese di un aumento nel numero delle onde di banda diversa componenti il pacchetto d'onda e quindi delle quantità di moto e quindi della velocità.

Il Principio di Indeterminazione

Più si tenta di definire la POSIZIONE della particella (confinandola in un volume sempre più piccolo), più questa aumenta la sua VELOCITA' e viceversa.

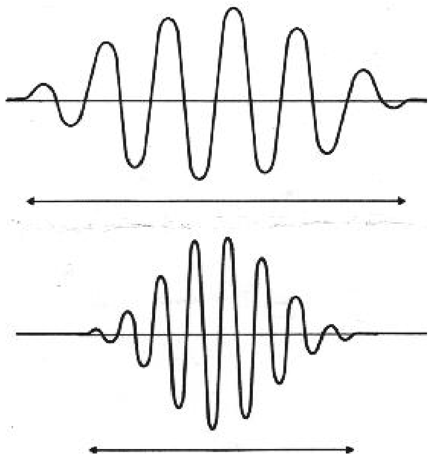
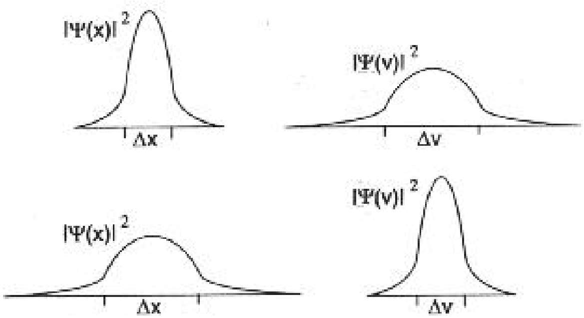


Figura F

La prossima figura mostra come dalle relazioni che legano le funzioni $\Psi(x)$ e $\Psi(\mathrm{v})$ segua che allorché una di esse risulti ben concentrata (e quindi le relativa variabile Δ risulta confinata in un intervallo stretto di valori) l'altra risulti allargata, e quindi la conseguente variabile risulta apprezzabilmente indeterminata. L'argomento rappresenta il modo matematicamente preciso di concludere che le variabili incompatibili posizione e velocità soddisfano inevitabilmente il Principio di Indeterminazione.



Nota :

Occorre fare molta attenzione infine, quando in meccanica quantistica si afferma: "la misurazione modifica la cosa misurata", perché questa asserzione sembra implicare che prima della misura un oggetto quantistico si trovi in un qualche stato definito (ma ignoto), che è stato poi disturbato da un atto di misura. E' vero invece che la misurazione conferisce una DETERMINAZIONE ad una quantità che in precedenza era (oggettivamente) indefinita; non si può assegnare alcun significato a una quantità finché non la si misura.

L'INDETERMINAZIONE ENERGIA/TEMPO

Si supponga di voler determinare l'energia di un fotone. Secondo il formalismo ideato da Planck, l'energia di un fotone è direttamente proporzionale alla frequenza della luce ($E = h\,\nu$): se si raddoppia la frequenza, anche l'energia diventa doppia. Un sistema pratico per misurare l'energia è quindi quello di misurare la frequenza dell'onda luminosa, il che si può fare contando il numero di oscillazioni (il susseguirsi cioè di massimi -le creste- e di minimi -gli avvallamenti-) in un dato intervallo di tempo. Per poter applicare questa procedura occorre comunque che si verifichi ***almeno una*** e preferibilmente, più di una oscillazione completa, che richiede un intervallo di tempo definito. L'onda deve passare da un massimo ad un minimo, e poi di nuovo tornare a un massimo. Misurare la frequenza della luce ***in un tempo inferiore*** a quello occorrente per un'oscillazione completa **è evidentemente impossibile, anche in via di principio**. Per la luce visibile il tempo occorrente è ridottissimo (un milionesimo di miliardesimo di secondo). Onde elettromagnetiche con lunghezze d'onda maggiore e frequenza minore, come le onde radio, possono richiedere qualche millesimo di secondo per compiere un'oscillazione completa. I fotoni delle radioonde hanno, in confronto, un'energia molto bassa; invece i raggi gamma oscillano migliaia di volte più rapidamente della luce e le energie dei fotoni sono maggiori di migliaia di volte. Queste semplici considerazioni mettono in evidenza l'esistenza di un limite fondamentale alla precisione con cui è possibile misurare la frequenza di un fotone (e quindi la sua energia) in un dato intervallo di tempo. ***Se l'intervallo è inferiore a un periodo dell'onda, l'energia e quanto mai indeterminata*** ; esiste quindi una relazione di indeterminazione che lega l'energia al tempo, identica a quella già vista per posizione e quantità di moto. Per avere una determinazione esatta dell'energia si deve effettuare una misurazione "relativamente lunga", ma, se ciò che ci interessa è invece l'istante in cui si verifica un evento, lo si potrà determinare in modo esatto solo a spese dell'informazione sull'energia. Ci si trova così a dover scegliere tra l'informazione sull'energia e l'informazione sul tempo, che presentano un'incompatibilità analoga a quella per posizione e moto. Questa nuova relazione di indeterminazione ha conseguenze molto importanti ... Va (ri)sottolineato che i limiti alle misurazioni sia di energia e tempo, sia di posizione e quantità di moto, non sono semplici insufficienze tecnologiche, ma proprietà assolute e intrinseche dalla natura. **In nessun senso si può pensare che un fotone (o un elettrone, o ecc.) possieda realmente un'energia ben definita in un dato istante**. Per i fotoni energia e tempo sono due caratteristiche incompatibili; quale delle due si manifesti con maggior precisione dipende solo dalla natura della misurazione (osservazione) che **si sceglie** di effettuare ...

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi} \text{ da ciò deriva che } \Delta E \approx \frac{h}{\Delta t}.$$

Da questa formula si vede che più Δt diventa piccolo (cioè più tende a 0) più ΔE diventa grande (cioè tende all'infinito).

Il principio di indeterminazione di Heisenberg.

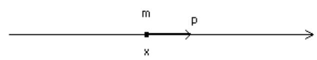
Un esempio didattico

Il **principio di indeterminazione di Heisenberg** è alla base della **meccanica quantistica** (MQ). Esso fu proposto da Heisenberg nel 1927 e questo dopo che l'**apparato matematico** della MQ era già stato **completamente** formulato. In effetti il principio di indeterminazione di Heisenberg è deducibile matematicamente da principi più generali e dall'impostazione matematica della teoria stessa. In queste pagine si metterà in evidenza come il principio di indeterminazione di Heisenberg possa essere ricavato matematicamente.

01 - Fondamenta concettuali e matematiche della MQ.

Il Principio di Indeterminazione

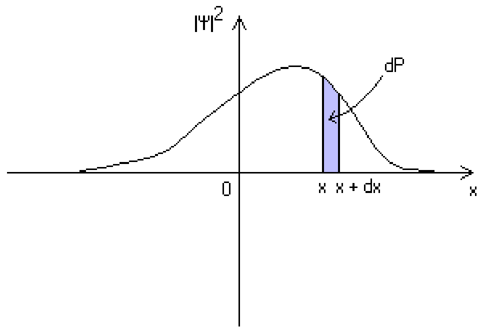
Si consideri una **particella** di **massa** m costretta a muoversi su una **retta** (ci limitiamo qui al solo moto unidimensionale). La **posizione** della particella è indicata con x e la sua **quantità di moto** (massa x velocità) con p :



Secondo la MQ, lo **stato** di una particella è descrivibile da una **funzione a valori complessi** delle **coordinate** e del **tempo** detta **funzione d'onda**. Si indichi tale funzione con $\Psi(x;t)$; Il significato fisico della funzione d'onda è che essa rappresenta la **probabilità** che la particella **si trovi** al tempo t nella posizione x . Esattamente si ha :

$$dP = \left|\Psi(x;t)\right|^2 dx$$

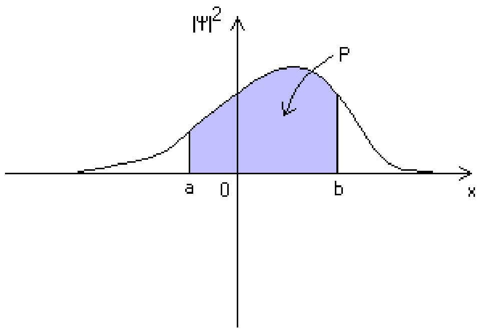
dove per la particella, **dP** rappresenta la probabilità di trovarsi nell'istante t nella posizione fra x e $x+dx$. Graficamente questa probabilità è data approssimativamente dall'area colorata



Il numero $\left|\Psi\left(x;t\right)\right|^2$ rappresenta quindi la **densità di probabilità** $\frac{dP}{dx}$ per la posizione x. La probabilità per la particella di trovarsi in un intervallo finito [a , b] è data dall'integrale :

$$dP = \int_a^b \left|\Psi\left(x;t\right)\right|^2 dx$$

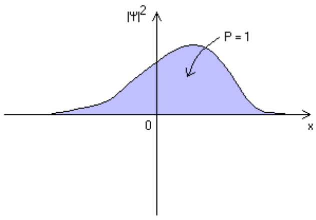
Graficamente



Ovviamente, la probabilità che la particella si trovi su **tutta** la retta è 1 (**certezza**) per cui si deve avere :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi\left(x;t\right)\right|^2 dx = 1$$

Graficamente



In questo caso la funzione d'onda si dice **normalizzata**. Le funzioni d'onda della MQ sono considerate come **vettori** dello **spazio di Hilbert** $\{L^2\}$ **delle funzioni a quadrato sommabile** per le quali la **norma** è definita come :

$$\|\Psi\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi \, dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x;t)|^2 \, dx}$$

dove Ψ^* indica il **complesso coniugato** di Ψ. Essendo Ψ un vettore, esso può essere **scomposto** rispetto ad una **base ortonormale** dello spazio $\{L^2\}$ nella seguente **somma**:

$$\Psi = a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2 + a_3\Psi_3 + \ldots + a_n\Psi_n$$

dove $\Psi_1;\Psi_2;\Psi_3;$.....è la suddetta **base** (si tratta di un insieme **numerabile** di vettori oppure di un insieme **continuo**). Se essi costituiscono un sistema di **autovettori** (**autofunzioni**) ortonormali di una certa **grandezza fisica** (per esempio energia, quantità di moto ecc.), allora i valori

$$|a_1|^2;|a_2|^2;|a_3|^2;\ldots$$

costituiscono le **probabilità** (o le **densità di probabilità** se le autofunzioni rappresentano un insieme continuo) per la particella di avere i corrispondenti valori della grandezza fisica in questione. Si noti che la MQ è una **teoria probabilistica**. In essa non si dà una descrizione **deterministica** della particella così come si fa in **meccanica classica** (MC) :

> ***Il concetto di traiettoria continua non è presente in MQ****. Al posto della* ***traiettoria*** *del punto è stato introdotto il concetto di* ***probabilità,*** *per il punto, di essere in una certa posizione ad un certo istante.*

Si noti anche che, essendo una funzione d'onda sviluppabile rispetto ad un sistema di autofunzioni, in MQ si ipotizza che una particella, in un certo istante, si trovi nella **sovrapposizione** di più **stati**.

NOTA BENE: Il concetto di **probabilità** e di **sovrapposizione** sono la basi della MQ; essi non sono riscontrabili in MC.

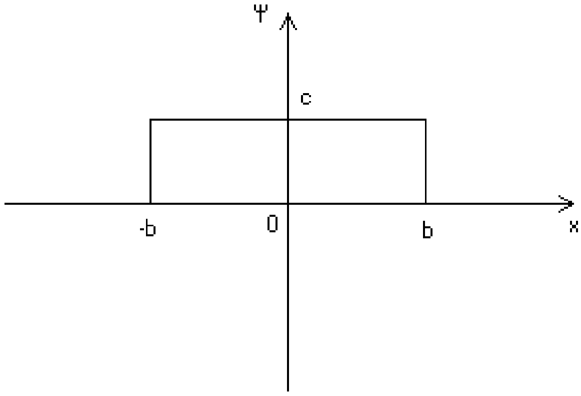
Si consideri ora un esempio molto semplice di funzione d'onda.

02 - Particella che si trova in un intervallo in modo equiprobabile.

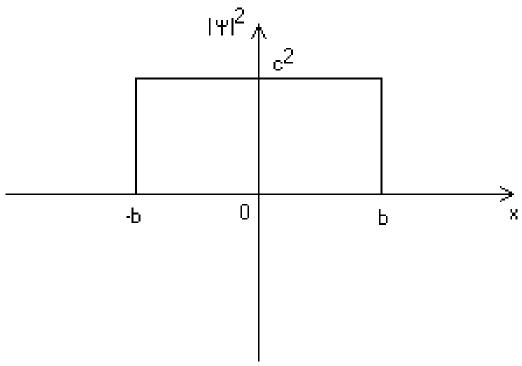
Supponendo che la particella in un certo istante si trovi nell'intervallo [-b , +b] essa, se non vi sono condizioni particolari, avrà in ogni punto dell'intervallo la **stessa probabilità di potersi localizzare**. Una tale funzione d'onda è per esempio la seguente:

$$\Psi = \begin{cases} \boldsymbol{c} & -\boldsymbol{b} \le \boldsymbol{x} \le +\boldsymbol{b} \\ 0 & \boldsymbol{x} < -\boldsymbol{b} \ \vee \ \boldsymbol{x} > +\boldsymbol{b} \end{cases}$$

Dove $\boldsymbol{b} > 0$; $\boldsymbol{c} > 0$. Graficamente:



(attenzione !!! in ordinata abbiamo qui Ψ e non $|\Psi|^2$). Il corrispondente grafico della densità di probabilità $|\Psi|^2$ è :



Una tale funzione d'onda porta alla **condizione di normalizzazione** (eseguita su $|\Psi|^2$) :

$$2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}^2 = 1 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{c} = \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{b}}}$$

In MQ la funzione d'onda esprime **tutte** le **caratteristiche** fisiche della particella, non solo quindi la densità di probabilità della posizione. Per questo motivo dobbiamo essere in grado di ricavare da Ψ anche la densità di probabilità della

quantità di moto $\mathbf{p}$. Per fare questo basta conoscere la forma della funzione d'onda di una particella dotata di una **determinata quantità di moto** $\mathbf{p}$, ovvero l'autofunzione (o autostato) della quantità di moto $\mathbf{p}$. Rifacendoci all'**ipotesi di de Broglie**, secondo la quale ad una particella è **associata un'onda** di lunghezza d'onda:

$$\lambda \cdot p = h$$

dove $\mathbf{h}$ è la **costante di Planck**, possiamo affermare che l'autostato della quantità di moto $\mathbf{p}$, che indichiamo con $\Psi_{\hat{p}}$, è :

$$\Psi_{\hat{p}} = \alpha \cdot e^{\left(\frac{i}{\hbar} px\right)} = \alpha \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right)$$

dove α è una costante che al momento non ci interessa determinare (è la costante di normalizzazione della funzione d'onda), i è l'unità immaginaria e $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, si pronuncia "h tagliato", La funzione $\Psi_{\hat{p}}$, infatti, rappresenta un'onda di lunghezza d'onda uguale alla lunghezza d'onda di de Broglie (lo si vede ponendo $\dfrac{px}{\hbar} = 2\pi$).

Detto questo, la **componente** della quantità di moto (il cui modulo quadro dà la sua densità di probabilità) si ricava **proiettando** la funzione d'onda della particella sull'autostato della quantità di moto, cioè:

$$a(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_p^* \cdot \Psi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \cdot e^{\left(-\frac{i}{\hbar} px\right)} \Psi \, dx$$

dove con $a(p)$ si indica, appunto, la componente della quantità di moto $\mathbf{p}$ (si noti che per fare la proiezione si prende il complesso coniugato di $\Psi_{\hat{p}}$). Il calcolo dell'integrale è piuttosto semplice (si tratta, a meno di costanti, della **trasformata di Fourier** di Ψ che, in questo caso, essendo Ψ costante, è facile da calcolare analiticamente). Ottenendo $a(p)$, si riesce quindi ad "estrarre" dalla funzione d'onda Ψ la *"informazione"* di come è distribuita la probabilità per la quantità di moto $\mathbf{p}$. Tutto ciò è "meraviglioso" ed "affascinante" e costituisce il "cuore" matematico della MQ, cuore che si base sull'**analisi funzionale** legata alla teoria degli **spazi vettoriali** ed in particolare dello **spazio** $\{L^2\}$. I facili calcoli ci forniscono:

$$a(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \cdot e^{\left(-\frac{i}{\hbar}px\right)} \Psi dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-b} \alpha \cdot e^{\left(-\frac{i}{\hbar}px\right)} \Psi dx + \int_{-b}^{+b} \alpha \cdot e^{\left(-\frac{i}{\hbar}px\right)} \Psi dx + \int_{+b}^{+\infty} \alpha \cdot e^{\left(-\frac{i}{\hbar}px\right)} \Psi dx$$

In base alla definizione delle funzione d’onda Ψ segue che

$$a(p) = \int_{-b}^{+b} \alpha \cdot e^{\left(-\frac{i}{\hbar}px\right)} c \cdot dx = \alpha c \int_{-b}^{+b} e^{\left(-\frac{i}{\hbar}px\right)} dx = \alpha c \left(-\frac{\hbar}{ip}\right) \left[e^{\left(-\frac{i}{\hbar}px\right)} \right]_{-b}^{+b}$$

$$a(p) = \alpha c \left(-\frac{\hbar}{ip}\right) \left[e^{\left(-\frac{i}{\hbar}px\right)} \right]_{-b}^{+b} = -\alpha c \cdot \frac{\hbar}{p} \cdot \frac{e^{\left(-\frac{i}{\hbar}pb\right)} - e^{\left(+\frac{i}{\hbar}pb\right)}}{i}$$

Introducendo le formule di Eulero:

$$a(p) = 2\alpha c \cdot \frac{\hbar}{p} \cdot \left[\frac{e^{\left(+\frac{i}{\hbar}pb\right)} - e^{\left(-\frac{i}{\hbar}pb\right)}}{2i} \right] = 2\alpha c \cdot \frac{\hbar}{p} \cdot \sin\left(\frac{pb}{\hbar}\right)$$

Essendo $2b \cdot c^2 = 1 \qquad \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2b}}$ ne segue:

$$a(p) = \frac{2\alpha}{\sqrt{2b}} \cdot \frac{\hbar}{p} \cdot \sin\left(\frac{pb}{\hbar}\right)$$

Questa è la **componente** della quantità di moto $\mathbf{p}$ rispetto alla corrispondente autofunzione per cui la **densità di probabilità** della quantità di moto risulta

$$|a(p)|^2 = \left(\frac{2\alpha^2\hbar^2}{b}\right) \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \sin^2\left(\frac{b}{\hbar}p\right)$$

L'integrale su tutti i valori di $\mathbf{p}$ di questa funzione deve dare ovviamente $\mathbf{1}$ per cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(p)|^2 dp = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} 2\alpha^2 b \left[\frac{\sin\left(\frac{b}{\hbar}p\right)}{\left(\frac{b}{\hbar}p\right)} \right]^2 dp = 1.$$

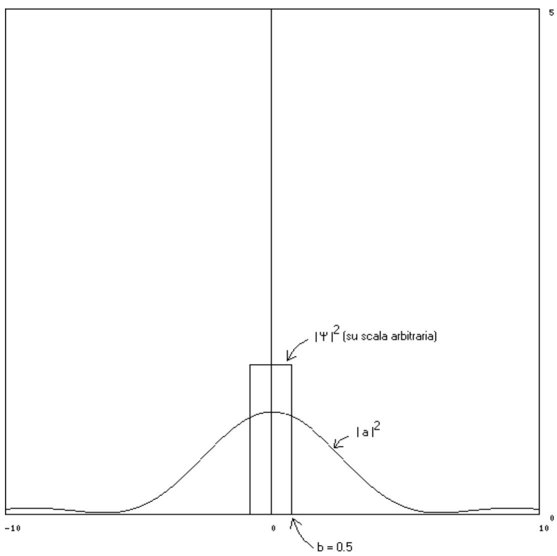
Questa condizione di normalizzazione può essere utilizzata per determinare il valore della costante α. Si dimostra nell'**APPENDICE** che il calcolo, non banale, porta il risultato finale:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \left(2\pi\hbar\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

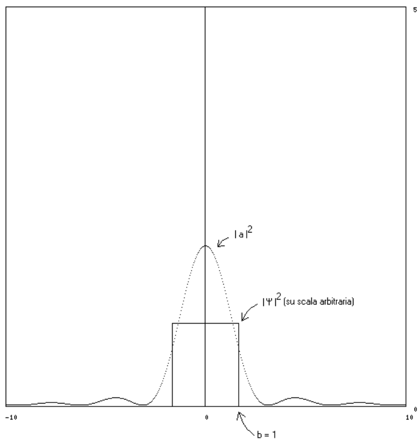
03 - Principio di indeterminazione di Heisenberg.

Confrontiamo graficamente alcune **densità di probabilità** $|\Psi|^2$ **di x** , ottenute variando il valore della costante ***b*** , con le **rispettive densità di probabilità** $|a(p)|^2$ **di p** (le costanti α ed $\hbar$ sono poste per comodità uguali ad 1) :

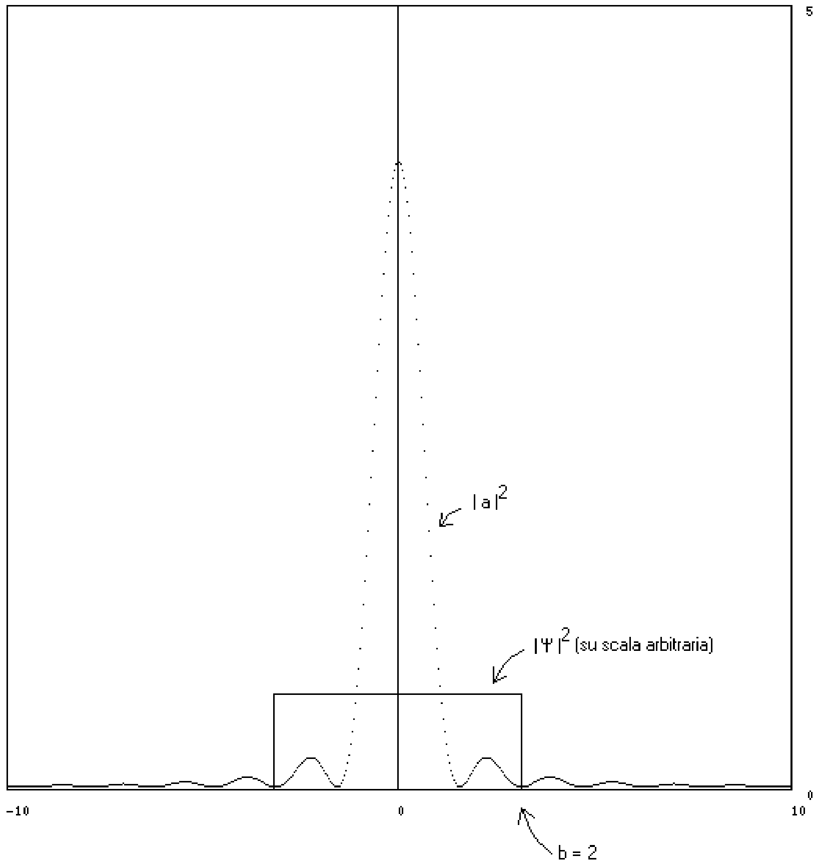
per b = 0.5 :



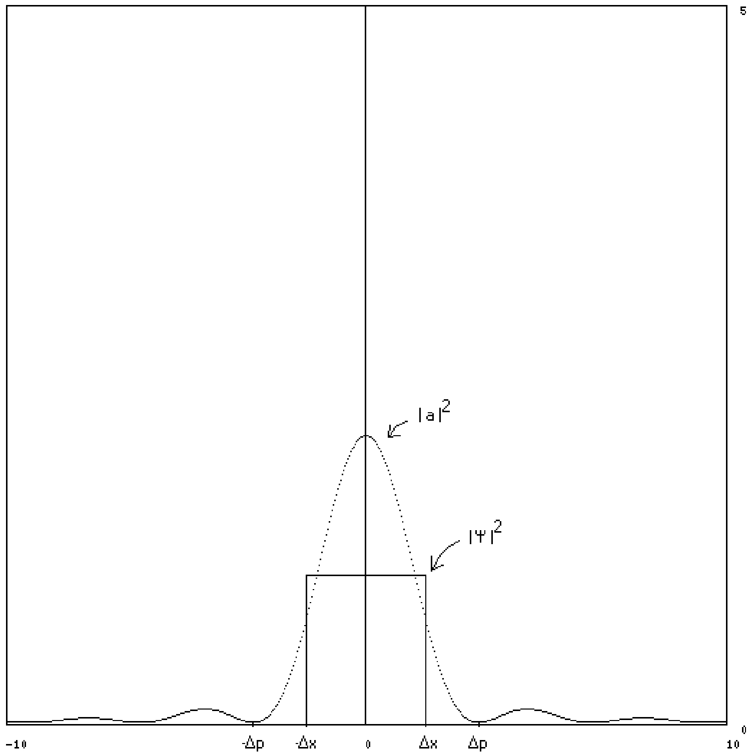
per b = 1 :



per b = 2 :



Quello che balza subito agli occhi è il fatto che quando $\boldsymbol{b}$ si "allarga", allora la densità $|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p})|^2$ si "stringe". Analizziamo questo fatto fondamentale definendo i **valori** $\Delta \boldsymbol{x}$ (dove nel nostro caso $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) e $\Delta \boldsymbol{p}$ così come indicato in figura :



Come appare evidente, la particella **si trova** nell'intervallo $\left[-\Delta x;+\Delta x\right]$ (e con uguale probabilità) e possiede una **quantità di moto** compresa **principalmente** nell'intervallo $\left[-\Delta p;+\Delta p\right]$ (non consideriamo i valori di $\mathbf{p}$ al di fuori di detto intervallo perché proco probabili). Nella letteratura scientifica si usa chiamare Δx **precisione** (o **indeterminazione**) **della posizione** e Δp **precisione** (o **indeterminazione**) **della quantità di moto**. Ricaviamo ora il valore di Δp considerando che in sua corrispondenza l'argomento del seno della formula (che dà $\left|a\left(p\right)\right|^2$) vale π . Abbiamo cioè : $\frac{b}{\hbar}p=\pi$ da cui si deduce che:

$$\Delta x\cdot\Delta p=\pi\hbar$$

Siamo giunti al **fondamentale** risultato che:

> Il prodotto della indeterminazione della posizione per la indeterminazione della quantità di moto è costante; (e questa costante è una costante universale).

Questa affermazione è valida per **ogni altro tipo** di funzione d'onda Ψ (del genere qui rappresentato, cioè "centrato" attorno ad un valore dato) e va sotto il nome di **principio di indeterminazione di Heisenberg**. Esso viene comunemente formulato più genericamente come :

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar .$$

Appendice : calcolo ella costante α di normalizzazione

Si dimostra che

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

Soluzione

Per calcolare questo integrale è importante osservare che la funzione, pur non essendo assolutamente integrabile, è invece integrabile nel senso attribuito agli integrali impropri. Tenendo conto che $|\sin x| \le 1$ *si deduce che la funzione è limitata e l'integrale è convergente: infatti*

$$0 < \left| \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| \le \left| \frac{1}{x^2} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \right| \le \left| \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \right|$$

Per calcolare il valore dell'integrale proposto si consideri la funzione integrale:

Il Principio di Indeterminazione

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

Eseguendo l'operazione di derivata seconda sotto il segno di integrale:

$$F'(\alpha)=\frac{dF}{d\alpha}=\int_0^{+\infty}\left[-x\cdot e^{-\alpha x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]dx$$

$$F''(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left[e^{-\alpha x}\sin^2 x\right]dx=\int_0^{+\infty}\left[e^{-\alpha x}\frac{1-\cos 2x}{2}\right]dx=$$

$$F''(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-\alpha x}}{2}\right]dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\alpha x}\cos(2x)\right]dx$$

Il primo integrale è di semplice soluzione per cui si ottiene:

$$F''(\alpha)=\frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\alpha x}\cos(2x)\right]dx$$

$$F''(\alpha)=\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\alpha x}\cos(2x)\right]dx$$

L'integrale rimasto si calcola facilmente con il metodo di integrazione per parti:

$$J=\int_0^{+\infty}\left[e^{-\alpha x}\cos(2x)\right]dx=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)$$

$$J = \left[e^{-\alpha x} \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} (-\alpha) \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\alpha x} \sin 2x \right] dx$$

Integrando ancora per parti si ottiene:

$$J = \frac{\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\alpha x} \sin 2x \right] dx = \frac{\alpha}{2} \left[e^{-\alpha x} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) \right]_0^{+\infty} - \frac{\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\alpha x} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) (-\alpha) \right] dx$$

sviluppando i calcoli

$$J = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{2} \right] - \frac{\alpha^2}{4} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\alpha x} \cos 2x \right] dx$$

$$J = \frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha^2}{4} J$$

Risolvendo rispetto al valore incognito:

$$J = \int_0^{+\infty} \left[e^{-\alpha x} \cos 2x \right] dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4}$$

Riassumendo il tutto si ottiene

$$F''(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4}$$

Adesso bisogna risalire alla funzione $F(\alpha)$ *tenendo conto delle proprietà di cui essa deve soddisfare:*

$$F'(\alpha)=\int_{\alpha}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha^2+4}\right)d\alpha=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{\alpha^2+4}\right)d\alpha=\frac{1}{2}\left[ln\,\alpha-\frac{1}{2}ln\left(\alpha^2+4\right)\right]_{\alpha}^{+\infty}$$

Sviluppando i calcoli:

$$F'(\alpha)=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\alpha}{\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}\right]_{\alpha}^{+\infty}=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\infty}\left[\ln\frac{\alpha}{\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}\right]-\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\alpha}{\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}\right]$$

Poiché il limite indicato è nullo

$$\left[\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha}{\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}\sqrt{1+\frac{4}{\alpha^2}}}=0\right]$$

segue

$$F'(\alpha)=-\frac{1}{2}\left[\ln\alpha-\ln\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}{\alpha}$$

Integrando nuovamente questa relazione (metodo di integrazione per parti) segue:

$$F(\alpha)=\frac{1}{2}\left[\alpha\cdot\ln\frac{\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}{\alpha}\right]_{\alpha}^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{+\infty}\left[\alpha\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}\cdot2\alpha\cdot\alpha-\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}{\alpha^2}\right]d\alpha$$

nella prima quantità, quando $\alpha\to+\infty$ *, il valore tende a zero quindi*

$$F(\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha\cdot\ln\frac{\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}{\alpha}-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{+\infty}\left[\cancel{\alpha}\cdot\frac{\cancel{\alpha}}{\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}\cdot\frac{\frac{\alpha^2}{\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}-\sqrt{\left(\alpha^2+4\right)}}{\cancel{\alpha^2}}\right]d\alpha$$

$$F(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha \cdot \ln\frac{\sqrt{(\alpha^2+4)}}{\alpha} - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{+\infty}\left[\frac{\cancel{\alpha^2} - \cancel{\alpha^2} - 4}{(\alpha^2+4)}\right]d\alpha$$

$$F(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha \cdot \ln\frac{\sqrt{(\alpha^2+4)}}{\alpha} + 2\int_{\alpha}^{+\infty}\left[\frac{1}{(\alpha^2+4)}\right]d\alpha$$

Risolvendo l'ultimo integrale per sostituzione il risultato sarà in arcotangente:

$$F(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha \cdot \ln\frac{\sqrt{(\alpha^2+4)}}{\alpha} + \left[arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]_{\alpha}^{+\infty}$$

$$F(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha \cdot \ln\frac{\sqrt{(\alpha^2+4)}}{\alpha} + \lim_{\alpha\to+\infty} arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) - arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$F(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha \cdot \ln\frac{\sqrt{(\alpha^2+4)}}{\alpha} + \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

A questo punto, per confronto tra il valore trovato e quello definito prima

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = -\frac{1}{2}\alpha \cdot ln\frac{\sqrt{(\alpha^2+4)}}{\alpha} + \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Per $\alpha \to 0$ *si ottiene:*

$$F(0) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

È banale, a tal punto, calcolare la costante α di normalizzazione: poiché risultava

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| a(p) \right|^2 dp = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} 2\alpha^2 b \left[\frac{\sin\left(\frac{b}{\hbar}p\right)}{\left(\frac{b}{\hbar}p\right)} \right]^2 dp = 1$$

ne segue che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2\alpha^2 b \left[\frac{\sin\left(\frac{b}{\hbar}p\right)}{\left(\frac{b}{\hbar}p\right)} \right]^2 dp = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha^2 b \left(\frac{\hbar}{b}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin\left(\frac{b}{\hbar}p\right)}{\left(\frac{b}{\hbar}p\right)} \right]^2 d\left(\frac{b}{\hbar}p\right) = 1$$

ovvero $\quad 2\alpha^2 \cancel{b} \left(\frac{\hbar}{\cancel{b}}\right) \pi = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$.