

# 2007

Progetto Quaderni di Matematica e Fisica A.S. 2006-2007

## Dal Pendolo ai Quarks Una occhiata alle carte di “Dio” e ai suoi “Entanglement”



*“Se il nostro solo strumento è un martello,  
ogni problema da affrontare assomiglierà  
ad un chiodo da battere”.*

*Prof. Fabrizio Tone*

Liceo Scientifico Leonardo da Vinci

10/06/2007

# Dal Pendolo ai Quarks

Riflessioni sulla Fisica del Novecento e sulle sue “stranezze”

## 1. Soluzioni dell'equazione di Schrödinger

Scrivere l'equazione di Schrödinger di un problema quantistico è solo l'inizio dell'avventura che porta alla conoscenza della fisica moderna; una volta che l'equazione formale del sistema fisico in studio è stata scritta, occorre saperla risolvere al fine di poter ricavare le funzioni d'onda da cui calcolare le proprietà del sistema stesso. La matematica coinvolta nel processo di soluzione dell'equazione di Schrödinger raramente è banale, e non è possibile cercare di analizzarla nel dettaglio; tuttavia è possibile cercare di capire un po' più a fondo come si proceda in tre casi concreti, fortemente idealizzati ma di importanza enorme, che permettono sia di riflettere sugli argomenti che interessano maggiormente (come gli atomi, i reticoli, la loro stabilità e il loro comportamento, ecc...), sia di aggiungere qualche cosa di nuovo.

Si comincia dall'equazione di Schrödinger, nella forma generale

$$H\psi = ih \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

dove  $H$  è l'hamiltoniana di un sistema fisico generico. Come è noto, questa equazione permette di calcolare la funzione d'onda  $\psi(t)$  del sistema e come essa evolva nel tempo. È tuttavia consueto semplificare il problema matematico della soluzione dell'equazione di Schrödinger limitandosi allo studio dei cosiddetti stati stazionari, ovvero stati in cui l'energia totale del sistema è definita e si mantiene costante nel tempo. Intuitivamente, si può pensare a questi stati come l'analogo quantistico di problemi meccanici in cui l'assenza di attriti e di forze esterne permette in ogni istante la conservazione dell'energia meccanica totale. Questi temi vengono discussi nello studio della Meccanica Analitica. Per ora è sufficiente limitarsi ad osservare, senza dimostrarlo matematicamente, che la funzione d'onda di uno stato stazionario di un qualunque problema quantistico può essere scritta fattorizzando la dipendenza dal tempo, ovvero

$$\psi(x;t) = \psi_E(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

La funzione d'onda può essere scritta come il prodotto di due fattori:  $\psi_E(x)$  è la funzione d'onda stazionaria del problema, dipende solo dalla coordinata spaziali  $x$  e il pedice  $E$  indica che si tratta di una soluzione dell'equazione di Schrödinger per valori di energia costanti e pari ad  $E$ , mentre il secondo fattore rappresenta l'evoluzione temporale della funzione d'onda secondo quanto imposto dall'equazione di Schrödinger. Se si accetta che tale fattorizzazione sia possibile (cosa dimostrabile), la funzione d'onda stazionaria obbedisce ad una forma semplificata dell'equazione di Schrödinger, detta anch'essa equazione di Schrödinger stazionaria, che assume questa forma:

$$\mathbf{H}\psi_E(x) = E\psi_E(x)$$

La dipendenza dal tempo è naturalmente sparita (non c'è più il termine di derivata della funzione d'onda rispetto al tempo), e il problema diventa quello di trovare le funzioni  $\psi_E(x)$  che, sotto l'azione dell'operatore hamiltoniano  $\mathbf{H}$  danno soluzioni ad energia costante  $E$ . A titolo di nomenclatura, senza pretesa qui di giustificare il perché di tali termini, un problema descritto dall'equazione di Schrödinger stazionaria appartiene ad una classe di problemi matematici descritti dalle cosiddette *equazioni agli autovalori*; nel caso specifico, i valori costanti di energia  $E$  sono detti *autovalori* dell'operatore  $\mathbf{H}$ .

## 2. OSCILLATORE ARMONICO

Fatte queste brevi premesse, è possibile affrontare, sommariamente, lo studio di un problema apparentemente semplice ed astratto, ma che in realtà ha dietro di sé un sacco di matematica piuttosto complicata e un'importanza fisica impressionante: si sta parlando **dell'oscillatore armonico lineare**. Questo nome altisonante descrive un problema che, dal punto di vista della Meccanica Classica, è ben noto: si tratta infatti del pendolo che compie piccole oscillazioni, o, se si preferisce, della massa che oscilla su un piano orizzontale attorno alla sua posizione di equilibrio per effetto della forza di richiamo di una molla, o anche del moto uniforme di un punto materiale su una circonferenza, visto proiettato su un suo diametro. In tutti i casi (si prende come modello la massa soggetta al richiamo di una molla) è possibile immaginare un punto materiale di massa  $m$  soggetto ad una forza di richiamo  $F = -kx$  con  $k$  la costante elastica della molla ed  $x$  lo scostamento dalla posizione di equilibrio. Poco importa se il problema

specifico non è realmente costituito da una massa soggetta alla forza richiamante di una molla; ciò che conta è che tutti questi problemi sono descrivibili con un'unica forza agente sul sistema, forza che dipende linearmente (con un segno meno) dallo scostamento del sistema dalla posizione di equilibrio (indicata in figura dalla coordinata spaziale pari a zero). Un problema siffatto è caratterizzato da un'energia potenziale pari a

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Per quanto tale problema possa apparire molto specifico, esso in realtà è incredibilmente generale, perché tantissimi problemi fisici sono riconducibili allo studio di un oscillatore armonico lineare, come senz'altro avremo modo di vedere in futuro.

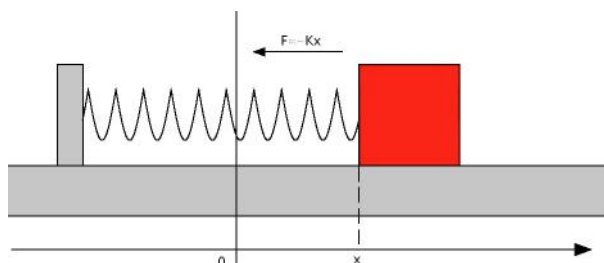


Figura 1

Un problema come quello descritto in Figura 1 (o un pendolo) è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- se la massa è nella posizione di equilibrio  $x = 0$  ed è inizialmente ferma, resta ferma poiché tale posizione è per l'appunto di equilibrio (la forza di richiamo è nulla);
- se la massa è inizialmente in una posizione diversa da  $x = 0$  oppure è lì ma con velocità non nulla, in assenza di attriti o di altre forze esterne (si ricordi che ci si occupa degli stati stazionari, quindi non c'è dissipazione né acquisizione di energia) il sistema compie un moto oscillatorio (armonico, per l'appunto) attorno alla posizione di equilibrio con pulsazione  $\omega = \sqrt{k/m}$  (ricordo che la pulsazione  $\omega$  è legata alla frequenza  $\nu$  dalla relazione  $\omega = 2\pi\nu$ ). La velocità del sistema è massima là dove l'energia potenziale è nulla (nella posizione di equilibrio) e nulla alle estremità dell'oscillazione.

Tutto questo per il problema classico. E per l'oscillatore armonico quantistico? La procedura ormai la sappiamo: come prima cosa ci serve

scrivere l'hamiltoniana del sistema classico; essa è la somma di energia cinetica ed energia potenziale, pertanto sarà:

$$H = T(p) + V(x) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

Poi applicando le regole che impongono, nel passaggio dal problema classico a quello quantistico, di sostituire alla variabile dinamica classica che determina la posizione tramite il *numero*  $x$  la corrispondente osservabile rappresentata dall' *operatore moltiplicativo*  $x$  e alla variabile dinamica impulso  $p$  la corrispondente osservabile rappresentata dall' *operatore di derivata* secondo lo schema

$$\left[ \begin{array}{l} x \xrightarrow{\text{operatore}} \hat{x} = x \\ p \xrightarrow{\text{operatore}} \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dt} \end{array} \right]$$

Si può scrivere l'equazione di Schrödinger stazionaria per l'oscillatore armonico quantistico:

$$\frac{d^2 \Psi_E(x)}{dx^2} - \left( \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \Psi_E(x) = 0$$

dove si è sostituito  $H$  all'equazione di Schrödinger stazionaria generica scritto prima, si è usata la *pulsazione*  $\omega$  in luogo della costante elastica  $k$  (perché  $\omega$  prescinde dal fatto che il problema sia realmente costituito da una massa oscillante per via della forza di richiamo di una molla) e sono stati semplicemente risistemati i termini per dare all'equazione un aspetto più convenzionale. Questa equazione (equazione di Schrödinger stazionaria per l'oscillatore armonico lineare quantistico) è un'equazione *differenziale* dove le soluzioni  $\psi_E(x)$  sono *funzioni* della coordinata spaziale  $x$  e compaiono nell'equazione sia derivate due volte rispetto alla coordinata stessa (il primo termine), sia moltiplicate dal quadrato della coordinata stessa (il secondo termine). Risolvere quest'equazione non è banale e richiederebbe molte pagine di conti e ancor più pagine di approfondimenti, ma non è dell'aspetto matematico del problema che ci si deve occupare qui. Si vuole vedere, invece, a quali risultati si arriva una volta che si riesce a risolvere l'equazione. Essi sono di due tipi, come in ogni problema quantistico stazionario:

- ❖ stabilire la *forma funzionale* delle  $\psi_E(x)$  del problema per ogni valore di energia  $E$  che il sistema potrà assumere (e che deve essere costante nel tempo essendo il problema stazionario);
- ❖ determinare lo *spettro* degli autovalori del problema, ovvero nel nostro caso, i valori dell'energia  $E$  che il sistema potrà assumere.

Per ciò che riguarda questo secondo punto: l'oscillatore armonico lineare quantistico stazionario è caratterizzato da uno spettro di *autovalori dell'energia* dato dalla seguente espressione:

$$E = E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) h\omega$$

Come si può osservare, si riconosce la *quantizzazione* dell'energia del sistema. Un oscillatore armonico lineare quantistico, a differenza del suo omologo classico, non può essere caratterizzato da un *qualunque* valore di energia: l'oscillatore classico (la massa richiamata dalla molla, ma anche il pendolo) può assumere qualunque valore di energia totale, perché l'ampiezza della sua oscillazione può essere assolutamente arbitraria. Così non è per il sistema quantistico: la sua energia non può assumere un valore  $E$  qualunque, ma può assumere solo valori  $E_n$  che dipendono da un numero  $n$  intero ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Se l'analogia con l'oscillatore classico avesse un senso (non ce l'ha, quindi prendete il tutto come un suggerimento), sarebbe *come se* l'oscillatore quantistico potesse compiere oscillazioni solo con ampiezze ben definite e discrete. Ormai questo risultato non ci sorprende più; lo stesso fatto si presenta quando si affrontano le problematiche relative agli atomi. L'oscillatore armonico quantistico è un problema *confinato*, perché l'energia potenziale diventa infinitamente grande quanto più ci si allontana dalla posizione di equilibrio, e nella teoria quantistica è noto che un sistema quantistico confinato è caratterizzato da un'energia che si distribuisce secondo uno *spettro* discreto. Ma c'è un altro aspetto notevole, ed è legato al principio di indeterminazione di Heisenberg: il valore *minimo* per l'energia di un oscillatore armonico quantistico compete al numero quantico  $n$  pari a zero,

$$E_0 = \frac{1}{2} h\omega$$

Ovvero: a differenza dell'oscillatore armonico classico, che volendo può anche non oscillare (e quindi avere energia pari a zero) qualora inizialmente

sia fermo nella sua posizione di equilibrio, un oscillatore armonico quantistico *non può mai* avere energia nulla; il motivo è evidente: se l'oscillatore armonico quantistico avesse energia nulla, potremmo conoscere *esattamente e contemporaneamente* sia la sua posizione (che sarebbe quella di equilibrio) che la sua velocità o il suo impulso (che sarebbe esattamente nullo), in aperta violazione del principio di indeterminazione di Heisenberg. Invece, un oscillatore armonico quantistico ha sempre un'energia *minima*, uno *stato fondamentale* di energia il cui valore (oltre all'immane costante di Planck) è legato alla pulsazione  $\omega$  che caratterizza il problema; intuitivamente, ricordando l'espressione di  $\omega$  che data in precedenza, quanto più è grande  $\omega$  (ovvero quanto più è "forte" la molla di costante  $K$  nel richiamare la massa verso la posizione di equilibrio), tanto più è ripida la curva descritta dall'energia potenziale, e tanto più alto sarà lo stato fondamentale dell'oscillatore, perché maggiore sarà il confinamento imposto dall'energia potenziale, e quindi per soddisfare il principio di indeterminazione di Heisenberg il sistema dovrà avere un impulso più grande e di conseguenza un'energia cinetica maggiore.

Non resta che parlare brevemente di come sono fatte le  $\psi_E(x)$  dell'oscillatore armonico quantistico: la loro espressione analitica è complicata, coinvolge dei particolari polinomi (detti di Hermite) che si definiscono ricorsivamente, ma è possibile, comunque, dare l'espressione delle funzioni d'onda stazionarie per i primi valori del numero quantico  $n$ . Chiamando con

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4}$$

Si ottiene

$$\psi_0(x) = N_0 H_0(x) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) = N_0 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)$$

$$\psi_1(x) = N_1 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) H_1(x) = N_1 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \left(2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right)$$

$$\psi_2(x) = N_2 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) H_2(x) = N_2 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \left(4\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x^2 - 2\right)$$

.....  
 .....

$$\psi_n(x) = N_n \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) H_n(x)$$

La rappresentazione grafica dei primi tre polinomi è data nella Figura 2 sottostante:

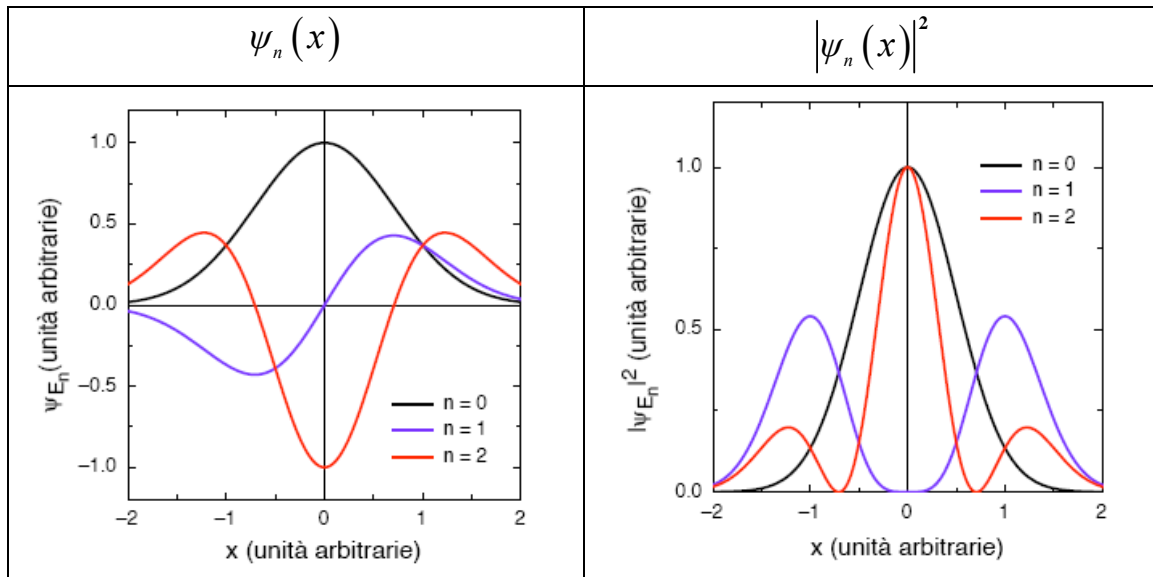


Figura 2

oltre alle prime tre funzioni d'onda, è stato disegnato anche il loro modulo quadro, che come è noto, risulta proporzionale alla probabilità di posizione del sistema, cioè alla probabilità di trovare la particella nella regione indicata: da qui si può facilmente vedere come all'aumentare del numero quantico  $n$  il sistema si localizzi in maniera sempre più ristretta attorno ad  $x = 0$  (posizione di equilibrio) per  $n$  pari, oppure sempre più alle estremità dell'oscillazione (per  $n$  dispari), ovvero là dove, classicamente, si inverte il moto di oscillazione e quindi la velocità del sistema si annulla e quindi è più probabile trovare il sistema: sta tornando alla ribalta il principio di corrispondenza di Bohr: per valori sufficientemente elevati dei numeri quantici, la descrizione classica del sistema approssima quella quantistica. La matematica riesce a spiegare perfettamente gli aspetti quantistici: una metodologia particolare, molto usata, è quella degli spazi di Hilbert ma non è possibile, in questa sede, darne una minima descrizione.

Se la discussione dell'oscillatore armonico quantistico è stata un ripasso di idee che già si conoscono dalla "fisica classica" (ripasso molto utile anche perché in futuro, si avrà modo di vedere che molti problemi all'apparenza diversissimi tra di loro sono modellizzabili mediante oscillatori armonici), qualche cosa di nuovo ed inaspettato emergerà dal secondo problema che verrà analizzato, quello del gradino di potenziale.

### 3. Gradino di potenziale

Lo schema della situazione fisica è rappresentato nella Figura 3:

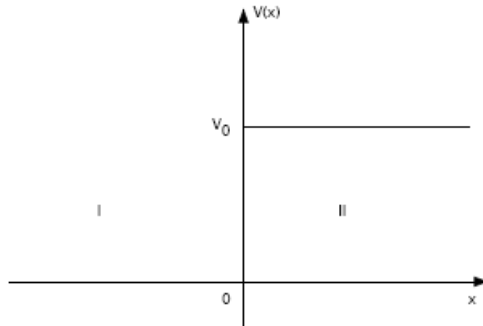


Figura 3

Una particella quantistica proviene dalla regione I con una certa velocità ed in corrispondenza della coordinata  $x = 0$  incontra un potenziale (che inizialmente valeva 0) che vale  $V_0$ ; in corrispondenza delle coordinate  $x$  positive si trova la regione II. Da un punto di vista classico, il problema è molto chiaro: la particella che proviene dalla regione I avrà una certa energia cinetica  $E$  (dovuta alla sua velocità) e nessuna energia potenziale. Giunta ad  $x = 0$ , la particella passerà nella regione II se  $E > V_0$ , mentre verrà riflessa nella regione I (con velocità uguale ed opposta) se  $E < V_0$ . Ma se il sistema è quantistico? Inutile dire che ci saranno sorprese!

Il problema è stazionario anche in questo caso, perché la particella proveniente dalla regione I ha energia ben definita (e costante). L'equazione di Schrödinger stazionaria sarà

$$\begin{cases} \frac{d^2\Psi_E(x)}{dx^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi_E(x) & (x < 0) \\ \frac{d^2\Psi_E(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\Psi_E(x) & (x > 0) \end{cases}$$

La soluzione va distinta in due casi:

- ❖  $E > V_0$ : classicamente sappiamo che questo caso corrisponde alla particella che oltrepassa il gradino di potenziale raggiungendo la regione II (con velocità naturalmente più piccola di quella che aveva nella regione I). Quantisticamente, bisogna risolvere le due equazioni di

Schrödinger stazionarie (per le due regioni I e II), ed essendo di fatto il problema uno solo imporre che ad  $x = 0$  le due funzioni d'onda così ottenute si saldino con continuità (in sostanza dobbiamo farle diventare una funzione d'onda sola), condizione che matematicamente si esprime imponendo che la funzione d'onda e la sua derivata prima siano continue in  $x = 0$ . Disponendo degli strumenti matematici necessari, si possono calcolare le soluzioni per questo problema quantistico:

$$\begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ \psi_{II}(x) = Ce^{ikx} \end{cases}$$

con A costante arbitraria,

$$B = \frac{k - k'}{k + k'} A \quad C = \frac{2k}{k + k'} A \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar} E} \quad k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar} (E - V_0)}$$

Sembra una cosa complicata, ma non lo è: a meno di A che è una costante che serve solo per normalizzare, le due funzioni d'onda per le regioni I e II dipendono sostanzialmente dall'energia  $E$  della particella nella regione I (attraverso  $k$ ), e dalla differenza  $(E - V_0)$  nella regione II (attraverso  $k'$ ), come per altro era lecito aspettarsi. Le condizioni che legano B e C ad A vengono dalla richiesta di saldatura delle funzioni d'onda  $\psi_I(x)$  e  $\psi_{II}(x)$  in  $x = 0$ . Che cosa c'è di tanto particolare in queste funzioni d'onda? Esse sono costituite di due pezzi: uno di essi è del tipo  $\exp(ikx)$ , che prende il nome di onda progressiva, ed è quello che sostanzialmente descrive il comportamento della particella che avanza da sinistra verso destra, come farebbe una particella classica; il secondo è del tipo  $\exp(-ikx)$ , che prende il nome di onda regressiva, e che descrive il comportamento della particella che torna indietro da destra verso sinistra. È interessante notare che nella regione II la funzione d'onda è dotata della sola componente progressiva: la particella arriva dalla regione I e se oltrepassa il gradino di potenziale allora procede indisturbata da sinistra verso destra nella regione II. Invece nella regione I la funzione d'onda ha ovviamente la componente di onda progressiva (la particella proviene da sinistra prima di raggiungere il gradino di potenziale), ma ha anche la componente di onda regressiva, che rende conto dell'eventualità che la particella non oltrepassi il

gradino di potenziale. Ma come è possibile? Siamo nel caso in cui  $E > V_0$ , la particella non dovrebbe sempre giungere nella regione II? Lo farebbe se la particella ubbidisse alle leggi della Meccanica Classica. Ma nello sconcertante mondo descritto dalle leggi della Meccanica Quantistica, la probabilità che la particella passi dalla regione I alla regione II si chiama coefficiente di trasmissione  $T$  ed è sostanzialmente legata al rapporto dei moduli quadri di  $C$  ed  $A$ , mentre la probabilità che la particella venga riflessa dal gradino di potenziale e torni indietro nella regione I si chiama coefficiente di riflessione  $R$  ed è sostanzialmente legata al rapporto dei moduli quadri di  $B$  ed  $A$ . Facendo i calcoli risulta che:

$$R = \left( \frac{k - k'}{k + k'} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}} \right)^2$$

$$T = \frac{4kk'}{(k + k')^2} = \frac{4\sqrt{E}\sqrt{E - V_0}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0})^2}$$

Ecco quindi che: se l'energia  $E$  è molto maggiore di  $V_0$  allora  $T \approx 1$  ed  $R \approx 0$ , esattamente come nel caso classico; ma se  $E$  è appena maggiore di  $V_0$ , allora  $T \approx 0$  e  $R \approx 1$ , che è l'esatto contrario di quanto ci si aspetterebbe: una particella quantistica che ha un'energia più alta di una barriera di potenziale, ma di poco, quasi certamente verrà riflessa da questa barriera, anziché oltrepassarla; se la oltrepasserà, essendo condannata ad andare molto piano perché  $E$  è di poco maggiore di  $V_0$ , il principio di indeterminazione di Heisenberg costringerà la particella ad avere una posizione praticamente non determinabile, fortemente dispersa (delocalizzata dovremmo dire) lungo tutta la regione II. Prima di esaminare il caso in cui  $E < V_0$  immaginiamo ancora in problema cui il gradino di potenziale, anziché essere "in salita" come adesso, sia "in discesa", ovvero valga  $-V_0$ . Il caso classico è di nuovo evidente: la particella proveniente dalla regione I giunge sul bordo di questo gradino (come una biglia che giunge sul bordo del tavolo) e senz'altro lo oltrepassa (la biglia cade dal tavolo e raggiunge il pavimento con una velocità maggiore di quella che aveva sul tavolo). Il caso quantistico è ovviamente diverso ma è anche sconcertante: i coefficienti di trasmissione e di riflessione si ottengono da quelli precedentemente

calcolati semplicemente sostituendo  $-V_0$  a  $V_0$ , col risultato (facile da verificare) che nel caso di particelle particolarmente lente ( $E$  piccolo rispetto a  $V_0$ ), la particella avrà una probabilità quasi uguale ad 1 di essere riflessa anziché di proseguire: è come se la biglia quantistica, giungendo molto piano sul bordo del tavolo, anziché cadere sul pavimento, tornasse indietro, respinta dal baratro. Sconcertante, non c'è che dire, ma tutto vero.

- ❖  $E < V_0$ : nel caso classico, la particella proveniente dalla regione I, avendo energia cinetica troppo piccola per “salire sopra la collina”, verrebbe riflessa dalla barriera di potenziale e tornerebbe indietro. E nel caso quantistico? Per fortuna è ancora così, non potrebbe essere altrimenti: la particella non avrebbe comunque energia sufficiente per entrare nella regione II, e dovendosi l'energia conservare non ci sarebbe verso di dare alla particella un comportamento differente; ma c'è comunque qualche cosa di particolare: il modulo quadro della funzione d'onda nella regione II si calcola essere proporzionale ad

$$\exp(-2\beta x) \quad \beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}(V_0 - E)}$$

Come noto, il modulo quadro di una funzione d'onda è proporzionale alla probabilità di trovare il sistema nel punto in cui la funzione è calcolata; orbene  $|\psi_{II}(x)|^2$  è pertanto diverso da zero in tutta la regione II, benché il suo valore decresca molto rapidamente (esponenzialmente) all'aumentare della distanza (nella regione II) dal punto  $x = 0$  in cui inizia il gradino di potenziale. Anche questo risultato è sorprendente: essendo  $|\psi_{II}(x)|^2$  diverso da zero per ogni valore di  $x > 0$ , il rapporto tra la probabilità di trovare la particella in un intervallo finito di II e quella di trovarla in un intervallo analogo di I è piccolo ma non nullo; per fortuna, il rapporto tra la probabilità di trovare la particella in tutta la regione II e quella di trovarla in tutta la regione I è nullo.

Lo studio del gradino di potenziale, specialmente nel caso in cui  $E < V_0$ , ci porta spontaneamente a studiare l'ultimo problema che sarà affrontato, quello della barriera di potenziale rettangolare, schematizzato nella figura successiva.

## 4. Barriera di potenziale

Anche qui bisogna immaginare una particella proveniente dalla regione I con una certa energia cinetica; nel caso classico, se essa è maggiore dell'altezza della barriera di potenziale, la particella raggiungerà la regione II, poi, giunta in prossimità del gradino in discesa, proseguirà nella regione III, acquisendo nuovamente la velocità che aveva nella regione I. Se invece la sua energia non è sufficiente a superare il gradino in  $x = 0$ , allora la particella sarà subito riflessa, tornando indietro nella regione I.

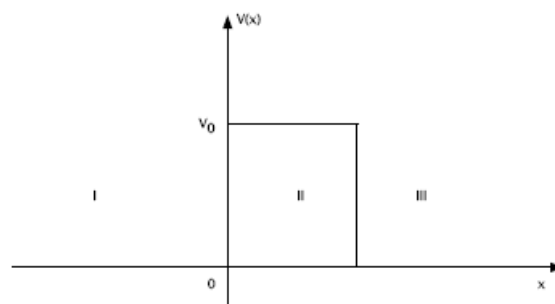


Figura 4

Un problema di questo genere è la più semplice schematizzazione possibile di un processo di diffusione stazionaria di una particella da parte di un campo di forze repulsive di portata finita (la “larghezza”  $l$  della barriera).

Il caso quantistico non presenta novità di rilievo nel caso in cui  $E > V_0$ . Già nel problema precedente, infatti, abbiamo studiato che cosa può avvenire in corrispondenza sia del gradino in salita che del gradino in discesa: così sappiamo che se la particella ha un'energia molto più grande di  $V_0$ , il suo comportamento sarà molto probabilmente analogo a quello classico, mentre per energie di poco superiori a  $V_0$  vi sarebbe un'elevata probabilità di riflessione, sia nel passaggio da I a II che nel passaggio da II a III.

Molto più interessante è il caso in cui, invece,  $E < V_0$ . Procedendo come nel problema precedente, e senza soffermarci troppo sui dettagli, si ottengono le seguenti relazioni che descrivono la funzione d'onda in ogni regione:

$$\begin{cases} \psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} & x < 0 \\ \psi_{II}(x) = F e^{-\beta x} + G e^{+\beta x} & 0 < x < l \\ \psi_{III}(x) = C e^{ikx} & x > l \end{cases} \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E} \quad \beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$$

Si osservi che:

- ❖  $\psi_I(x)$  ha entrambe le componenti di onda progressiva e onda regressiva, come è logico aspettarsi (la particella ha energia inferiore all'altezza della barriera di potenziale e almeno nel caso classico sappiamo che deve venire riflessa);
- ❖  $\psi_{II}(x)$  è caratterizzata da un andamento esponenziale reale (negli altri casi l'esponenziale ha argomento immaginario, per via dell'unità  $i$ , ed è soltanto un altro modo di scrivere le funzioni seno e coseno, quelle delle onde), anche detto di onda evanescente, anche in questo caso progressiva e regressiva; vedremo tra poco che cosa implica tutto questo;
- ❖  $\psi_{III}(x)$  ha la sola componente di onda progressiva, come è giusto che sia nel caso in cui la particella riesca comunque a passare dalla regione I alla regione III, pur non avendo energia sufficiente per superare (classicamente) il gradino di potenziale;
- ❖ Le condizioni di saldatura delle tre funzioni d'onda (che qui non vengono indicate) impongono dei legami tra le costanti A, B, C, F e G, una sola delle quali sarà arbitraria e verrà usata per normalizzare la funzione d'onda (così che la probabilità di trovare la particella in un punto qualunque dello spazio, ovvero per un qualunque valore di  $x$ , sia uguale ad 1).

Ora è necessario riflettere con una certa audacia: se è vero che nella regione II non si può mai trovare la particella perché essa non ha energia sufficiente per trovarsi lì, è anche vero che nella regione II la funzione d'onda non è nulla; per cui non è nulla nemmeno quando si arriva all'interfaccia con la regione III, e infatti la funzione d'onda in quest'ultima parte è anch'essa diversa da zero; ma qui, nella regione III, la particella può esistere comodamente, perché la sua energia (che vale sempre  $E$  perché il problema è stazionario e quindi l'energia non diminuisce né si incrementa) è certamente maggiore del potenziale (che in III vale 0). Quindi esiste una probabilità (proporzionale al modulo quadro di  $\psi_{III}(x)$ ) di trovare la particella nella regione III benché essa non abbia energia sufficiente per trovarsi nella regione II. Ancora una volta possiamo esprimere la probabilità che la particella ha di oltrepassare la barriera di potenziale, o di essere da essa riflessa, mediante i due coefficienti:

$$R = \left\{ I + \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 \sinh^2(\beta l)} \right\}^{-1} \quad T = \left\{ I + \frac{V_0^2 \sinh^2(\beta l)}{4E(V_0 - E)} \right\}^{-1}$$

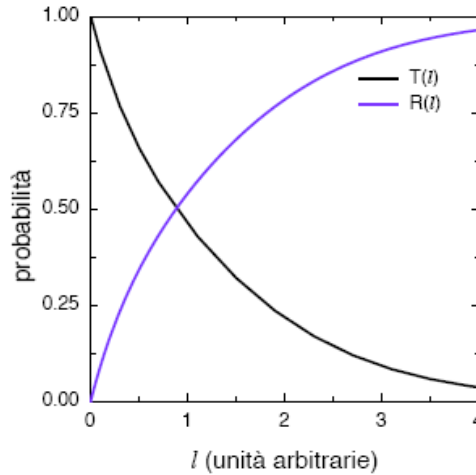


Figura 5

La Figura 5 mostra l'andamento funzionale dei due coefficienti di riflessione e trasmissione al variare della lunghezza  $l$  della barriera di potenziale ( $x = l$  è il punto in cui si passa dalla regione II alla regione III): come si vede dal grafico, quanto più è corta la barriera di potenziale, tanto più probabile è che la particella, pur non avendo energia sufficiente (classicamente) per oltrepassarla, si ritrovi nella regione III, mentre quanto più è lunga la barriera di potenziale, tanto più è probabile che si manifesti il comportamento classico di riflessione della particella nella regione I. Questo meccanismo di “*passare attraverso una barriera di potenziale*” che classicamente sarebbe invalicabile prende il nome di “**effetto tunnel**”, ed è un effetto quantistico che si manifesta in svariate occasioni e che è tra l'altro invocato per descrivere il decadimento radioattivo di tipo “ $\alpha$ ” di alcuni atomi

Se in merito all'oscillatore armonico abbiamo già detto che esso è il prototipo per descrivere una gran varietà di fenomeni fisici, e quindi il suo studio ha un'importanza pratica (oltre che concettuale) enorme malgrado l'apparente idealizzazione del sistema fisico, anche per quanto riguarda il gradino di potenziale e la barriera di potenziale rettangolare è possibile fare ragionamenti analoghi: qualunque potenziale fisico vero, infatti, sarà bene o male approssimabile con un certo numero di gradini e/o barriere di potenziale, pertanto essi costituiscono, concettualmente e praticamente, i “*mattoni*” per poter studiare sistemi più complessi e comprenderne le sorprendenti proprietà quantistiche.