Liceo Scientifico Statale "Leonardo Da Vinci"

Via Possidonea 14, Reggio Calabria – Tel. 0965 – 29911

www.liceovinci.rc.it

Progetto Quaderni di Matematica e Fisica a. s. 2005 – 2006

"LA CIRCONFERENZA"

Prof.ssa Myriam Calipari

Email: mjriam.calipari@tin.it

"Fintanto che una disciplina scientifica
presenta una grande quantità di problemi,
essa continua ad essere viva". D. Hilbert

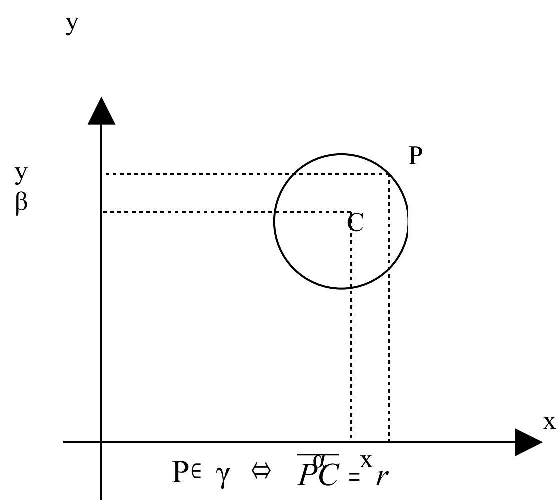
"Ai miei genitori,
che con immenso amore mi hanno insegnato
la gioia di vivere"
Myriam Calipari

LA CIRCONFERENZA

❖ EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

La circonferenza è il *luogo geometrico*[1] *dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro*.

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, consideriamo una circonferenza di centro *C(α , β)* e raggio *r*; un punto *P(x , y)* appartiene alla circonferenza se e solo se la distanza da tale punto al centro della circonferenza è uguale al raggio;



Per determinare l'equazione della circonferenza partiamo propr izione e troviamo la distanza PC:

$\overline{PC} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$ [2]

Poiché $\overline{PC} = r$ avremo:

$\overline{PC}^2 = r^2$

$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$ EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA IN FORMA CARTESIANA.

Tale equazione viene utilizzata quando sono note le coordinate *(α , β)* del suo centro C e la lunghezza r del raggio.

Se sviluppiamo tale equazione otteniamo:

---

[1] Luogo geometrico = insieme di punti che godono tutti di una stessa proprietà.
[2] Formula della distanza fra due punti.

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2-r^2=0$$
$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\left(\alpha^2+\beta^2-r^2\right)=0$$

Se operiamo le seguenti sostituzioni:

$$\begin{cases}-2\alpha=a\\-2\beta=b\\\alpha^2+\beta^2-r^2=c\end{cases}$$

L'equazione della circonferenza diventa:

$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$ questa equazione viene detta EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA IN FORMA NORMALE

e presenta le seguenti caratteristiche:

1. E' un'equazione di secondo grado in due incognite;
2. Manca il termine rettangolare (cioè il termine in xy);
3. I coefficienti dei termini di secondo grado sono entrambi uguali ad 1.

Dalle sostituzioni fatte precedentemente

$$\begin{cases}-2\alpha=a\\-2\beta=b\\\alpha^2+\beta^2-r^2=c\end{cases}$$

si avrà che:

$$\begin{cases}\alpha=-\dfrac{a}{2}\\\beta=-\dfrac{b}{2}\\r^2=\alpha^2+\beta^2-c=\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{b}{2}\right)^2-c\Rightarrow\ r=\sqrt{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{b}{2}\right)^2-c}\end{cases}$$

Perciò, data l'equazione di una circonferenza in forma normale, per trovare le coordinate del suo centro C e la misura del raggio r, possiamo servirci della seguenti formule:

$$C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$$

$$r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

da questo ricaviamo che un'equazione di secondo grado, in due incognite, mancante del termine rettangolare ed in cui i coefficienti dei termini di secondo grado sono entrambi pari ad 1 rappresenta una circonferenza se e solo se si verifica anche che:

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c>0$$

Se, invece, accade che:

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c<0$$

la circonferenza avrà raggio immaginario (perciò non sarà una circonferenza reale); mentre se si verifica che:

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c=0$$

la circonferenza avrà raggio nullo; essa, perciò, si riduce al solo centro C e verrà denominata "*circonferenza degenere*".

Anche un'equazione del tipo:

$\boxed{kx^2+ky^2+ax+by+c=0}$ può rappresentare una circonferenza; essa viene definita EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA IN FORMA GENERALE

e, affinché essa rappresenti una circonferenza, dovrà presentare le seguenti caratteristiche:

1. Equazione di secondo grado in due incognite;
2. Manca il termine rettangolare;
3. I coefficienti dei termini di secondo grado sono uguali fra loro;
4. $\left(-\frac{a}{2k}\right)^2+\left(-\frac{b}{2k}\right)^2-\frac{c}{k}>0$

Data l'equazione di una circonferenza in forma generale, per ricavarci da essa le coordinate del centro e del raggio, è necessario portare l'equazione in forma normale (dividendo ogni termine della sua equazione per k) e poi applicare le formule precedentemente date.

ESERCIZIO N°1

Stabilire se l'equazione $\gamma): x^2+y^2-2x+4y-1=0$ rappresenta una circonferenza e, in caso affermativo, calcolare le coordinate del centro ed il raggio della circonferenza.

SVOLGIMENTO:

L'equazione data:

1. E' di secondo grado in due incognite;
2. E' mancante del termine rettangolare;
3. Ha i coefficienti dei termini di secondo grado entrambi uguali ad 1 (forma normale);

Resta solo da verificare che:

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c>0$$

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(-\frac{4}{2}\right)^2-(-1)>0$$

$$1+4+1>0$$

$$6>0$$

Avremo, perciò una circonferenza reale avente centro *C(1 , -2)* e raggio $r=\sqrt{6}$.

ESERCIZIO N°2:

L'equazione $\gamma):4x^2+4y^2+7x-12y+28=0$ rappresenta una circonferenza?

SVOLGIMENTO:

L'equazione data:

1. E' di secondo grado in due incognite;
2. E' mancante del termine rettangolare;
3. Ha i coefficienti dei termini di secondo grado uguali fra loro, ma diversi da 1 (forma generale);

resta da verificare che:

$$\left(-\frac{a}{2k}\right)^2+\left(-\frac{b}{2k}\right)^2-\frac{c}{k}>0$$

$$\left(-\frac{7}{8}\right)^2+\left(+\frac{12}{8}\right)^2-\frac{28}{4}>0$$

$$\frac{49}{64}+\frac{144}{64}-\frac{28}{4}>0$$

$$\frac{49+144-448}{64}>0$$

$$-\frac{255}{64}<0$$

da ciò ricaviamo che γ non rappresenta una circonferenza reale.

ESERCIZIO N°3:

L'equazione $\gamma):3x^2+y^2+3x-2y+4=0$ rappresenta una circonferenza?

SVOLGIMENTO:

La precedente equazione non può rappresentare una circonferenza in quanto i coefficienti dei termini di secondo grado sono diversi fra loro.

❖ CIRCONFERENZE CON PARTICOLARI VALORI DEI COEFFICIENTI

Data l'equazione di una circonferenza in forma normale:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

possono verificarsi i seguenti casi:

- a = 0 (cioè manca il termine di primo grado in x); in questo caso il centro avrà ascissa nulla, perciò apparterrà all'asse delle y;
- b = 0 (cioè manca il termine di primo grado in y); in questo caso il centro avrà ordinata nulla, perciò apparterrà all'asse delle x;
- c = 0 (cioè manca il termine noto); in questo caso la circonferenza passerà per l'origine degli assi;
- a = b = 0 (cioè mancano contemporaneamente i due termini di primo grado); in questo caso la circonferenza avrà centro nell'origine degli assi;
- a = c = 0 (cioè se mancano contemporaneamente il termine di primo grado in x ed il termine noto); in questo caso la circonferenza avrà il centro sull'asse delle y e sarà tangente nell'origine all'asse delle x;
- b = c = 0 (cioè se mancano contemporaneamente il termine di primo grado in y ed il termine noto); in questo caso la circonferenza avrà il centro sull'asse delle x e sarà tangente nell'origine all'asse delle y.

❖ POSIZIONE DI UN PUNTO RISPETTO AD UNA CIRCONFERENZA

Così come avviene per la retta e per tutte le curve, un punto P appartiene alla circonferenza γ se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione della circonferenza.

Se ciò non accade possono verificarsi due casi:

1. Se le coordinate di P, sostituite nell'equazione della circonferenza (in forma normale o generale) producono un primo membro positivo, allora il punto sarà esterno alla circonferenza;
2. Se le coordinate di P, sostituite nell'equazione della circonferenza (in forma normale o generale) producono un primo membro negativo, allora il punto sarà interno alla circonferenza.

ESERCIZIO N°4:

Verificare se i punti P(1 , -2); Q(3 , 6); R(0 , -1) appartengono alla circonferenza $\gamma): x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

SVOLGIMENTO:

Sostituiamo le coordinate di P nell'equazione di γ:

$$(1)^2+(-2)^2+2(1)+4(-2)+1=0$$
$$1+4+2-8+1=0$$
$$0=0 \Rightarrow P \in \gamma$$

Sostituiamo le coordinate di Q nell'equazione di γ:

$$(3)^2+(6)^2+2(3)+4(6)+1=0$$
$$9+36+6+24+1=0$$
$$76 \neq 0 \Rightarrow Q \notin \gamma$$

e, poiché 76>0, ⇒ P è ESTERNO a γ.

Sostituiamo le coordinate di R nell'equazione di γ:

$$(0)^2+(-1)^2+2(0)+4(-1)+1=0$$
$$0+1+0-4+1=0$$
$$-2 \neq 0 \Rightarrow Q \notin \gamma$$

e, poiché –2<0, ⇒ P è INTERNO a γ.

Per stabilire la posizione di un punto P rispetto ad una circonferenza γ di centro C e raggio r, si può anche procedere confrontando la distanza PC con il raggio della circonferenza. Potrà verificarsi uno dei seguenti tre casi:

1. $\overline{PC}=r \quad \Rightarrow P \in \gamma$
2. $\overline{PC}>r \quad \Rightarrow P \notin \gamma$ e, in particolare, P è esterno a γ
3. $\overline{PC}<r \quad \Rightarrow P \notin \gamma$ e, in particolare, P è interno a γ

❖ COME SI RICAVA L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

► Se sono note le coordinate del centro e la lunghezza del raggio:

ESERCIZIO N°5:

Scrivere l'equazione della circonferenza di centro *C(-3 , -6)* e raggio *r = 1*.

SVOLGIMENTO:

Si applica direttamente l'equazione cartesiana:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$
$$(x+3)^2+(y+6)^2=1$$
$$x^2+9+6x+y^2+36+12y-1=0$$
$$\gamma):x^2+y^2+6x+12y+44=0$$

► Se sono note le coordinate del centro C e di un punto P della circonferenza:

ESERCIZIO N°6:

Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ e passante per il punto P(2,3).

SVOLGIMENTO:

Il raggio della circonferenza sarà il segmento CP:

$$r = \overline{CP} = \sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\left(3-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

Adesso, noti il centro ed il raggio, applichiamo l'equazione cartesiana:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2$$

$$x^2+\frac{9}{4}-3x+y^2+\frac{1}{4}-y-\frac{13}{2} = 0$$

$$4x^2+9-12x+4y^2+1-4y = 26$$

$$4x^2+4y^2-12x-4y-16 = 0$$

$$\gamma): x^2+y^2-3x-y-4 = 0$$

► Se sono note le coordinate degli estremi di un diametro:

ESERCIZIO N°7:

Scrivere l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi A(4 , -3) e B(-7 , 2).

SVOLGIMENTO:

Il centro di tale circonferenza sarà il punto medio M del segmento AB:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A+y_b}{2} \end{cases} \; {}^{3} \; \begin{cases} x_M = \dfrac{4-7}{2} = -\dfrac{3}{2} \\ y_M = \dfrac{-3+2}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \Rightarrow \; M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Il raggio di tale circonferenza sarà la metà del diametro AB:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-7-4)^2+(2+3)^2} = \sqrt{121+25} = \sqrt{146}$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{146}}{2}$$

Adesso, noti il centro ed il raggio, applichiamo l'equazione cartesiana:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{146}}{2}\right)^2$$

$$x^2+\frac{9}{4}+3x+y^2+\frac{1}{4}+y-\frac{146}{4} = 0$$

$$4x^2+9+12x+4y^2+1+4y-146 = 0$$

$$4x^2+4y^2+12x+4y-136 = 0$$

$$\gamma): x^2+y^2+3x+y-34 = 0$$

► Se sono note le coordinate di tre punti per i quali passa la circonferenza[4]:

ESERCIZIO N°8:

Scrivere l'equazione della circonferenza passante Per A(2, 3), B(4 , 1), C(2 , -1).

SVOLGIMENTO NUMERO 1:

Consideriamo l'equazione della circonferenza in forma normale:

$$x^2+y^2+ax+by+c = 0$$

ed imponiamo che tale circonferenza passi per i tre punti dati:

PRIMA CONDIZIONE: la circonferenza deve passare per il punto A:

[3] Formula del punto medio di un segmento.
[4] Ricordiamo che per tre punti non allineati passa una sola circonferenza.

$(2)^2 + (3)^2 + a(2) + b(3) + c = 0$
$4 + 9 + 2a + 3b + c = 0$
$2a + 3b + c + 13 = 0$

<u>SECONDA CONDIZIONE</u>: la circonferenza deve passare per il punto B:

$(4)^2 + (1)^2 + a(4) + b(1) + c = 0$
$16 + 1 + 4a + b + c = 0$
$4a + b + c + 173 = 0$

<u>TERZA CONDIZIONE</u>: la circonferenza deve passare per il punto C:

$(2)^2 + (-1)^2 + a(2) + b(-1) + c = 0$
$4 + 1 + 2a - b + c = 0$
$2a - b + c + 5 = 0$

Poiché queste tre condizioni devono essere verificate contemporaneamente, risolvo il sistema formato dalle tre equazioni precedentemente trovate:

$$\begin{cases} 2a + 3b + c + 13 = 0 \\ 4a + b + c + 17 = 0 \\ 2a - b + c + 5 = 0 \end{cases}$$

Si può facilmente dimostrare che tale sistema ammette la seguente soluzione:

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Perciò la circonferenza richiesta ha equazione:

$\gamma) : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

<u>SVOLGIMENTO N°2:</u>

La circonferenza passante per i punti A, B, C sarà la circonferenza circoscritta al triangolo ABC; dalla geometria piana sappiamo che il centro della circonferenza circoscritta ad un triangolo è il circocentro di tale triangolo[5].

Detto M il punto medio del lato AB, avremo:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad M(3,2)$$

Il coefficiente angolare della retta AB sarà: $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_a - x_B} = \dfrac{1-3}{4-2} = -1$ [6]

$$m_{\perp} = -\frac{1}{m_{AB}} = 1$$

Perciò l'equazione dell'asse del segmento AB sarà:

$y - y_m = m_{\perp}(x - x_M)$ [7]

$y - 2 = 1(x - 3)$
$y - 2 = x - 3$
$x - y - 1 = 0$

Detto N il punto medio del lato BC, avremo:

---

[5] Cioè il punto di intersezione degli assi (asse= perpendicolare ad un lato condotta per il suo punto medio.
[6] Formula del coefficiente angolare della retta passante per due punti assegnati.
[7] Formula della retta passante per un punto dato e di coefficiente angolare assegnato.

$$\begin{cases} x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 \\ y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \end{cases}$$ N (3 , 0)

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1-1}{2-4} = 1$$
$$m_\perp = -1$$

L'equazione dell'asse del segmento BC è:

$$y - y_N = m_\perp (x - x_N)$$
$$y - 0 = -1(x-3)$$
$$y = -x+3$$
$$x + y - 3 = 0$$

Il centro della circonferenza γ sarà il circocentro del triangolo ABC (che chiameremo con D), e perciò sarà il punto di intersezione dei due assi appena trovati:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Poiché la soluzione di tale sistema è: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, il circocentro sarà D(2 , 1).

Il raggio della circonferenza sarà: $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$

$$\overline{DA} = \sqrt{(2-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Per trovare l'equazione della circonferenza richiesta, sfrutto la forma cartesiana:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 4 = 0$$
$$\gamma): x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

Tale equazione è, naturalmente, del tutto identica a quella trovata seguendo lo svolgimento n°1.

► Se sappiamo che il centro appartiene ad una retta assegnata e che, inoltre, la circonferenza passa per due punti assegnati:

ESERCIZIO N°9:

Scrivere l'equazione della circonferenza passante Per A(-1 , 3), B(4 , -2) ed avente il centro C sulla retta *r): x-2y+2=0*.

SVOLGIMENTO NUMERO 1:

Consideriamo l'equazione della circonferenza in forma normale:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

imponiamo le seguenti condizioni:

PRIMA CONDIZIONE: A(-1 , 3) appartiene alla circonferenza:

$$(-1)^2 + (3)^2 + a(-1) + b(3) + c = 0$$
$$1 + 9 - a + 3b + c = 0$$
$$a - 3b - c - 10 = 0$$

SECONDA CONDIZIONE: B(4 ,-23) appartiene alla circonferenza:

$$(4)^2 + (-2)^2 + a(4) + b(-2) + c = 0$$
$$16 + 4 + 4a - 2b + c = 0$$
$$4a - 2b + c + 20 = 0$$

TERZA CONDIZIONE: $C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right) \in r): x-2y+2=0$:

$$-\frac{a}{2}-2\left(-\frac{b}{2}\right)+2=0$$
$$-\frac{a}{2}+b+2=0$$
$$a-2b-4=0$$

Poiché queste tre condizioni devono essere verificate contemporaneamente le mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} a-3b-c-1=0 \\ 4a-2b+c+20=0 \\ a-2b-4=0 \end{cases}$$

Poiché tale sistema ammette per soluzione la terna: $\begin{cases} a=-8 \\ b=-6 \\ c=0 \end{cases}$, l'equazione della circonferenza cercata sarà:

$$\gamma): x^2+y^2-8x-6y=0$$

SVOLGIMENTO NUMERO 2:

L'esercizio indica che il centro C appartiene alla retta r, ma dalla geometria elementare sappiamo anche che tale centro appartiene all'asse del segmento AB.

Detto M il punto medio del segmento AB, avremo:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad M\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Il coefficiente angolare della retta AB sarà: $m_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_a-x_B} = \frac{-2-3}{4+1} = -\frac{5}{5} = -1$

$$m_\perp = -\frac{1}{m_{AB}} = -1$$

Detto *a* l'asse del segmento AB, avremo:

$$y-y_M = m_\perp\left(x-x_M\right)$$
$$y-\frac{1}{2} = 1\left(x-\frac{3}{2}\right)$$
$$y-\frac{1}{2} = x-\frac{3}{2}$$
$$2x-2y-2=0$$
$$x-y-1=0$$

Se $C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ è il centro della circonferenza richiesta, impongo le seguenti due condizioni:

PRIMA CONDIZIONE: C appartiene alla retta *r*:

$$-\frac{a}{2}-2\left(-\frac{b}{2}\right)+2=0$$
$$-\frac{a}{2}+b+2=0$$
$$a-2b-4=0$$

SECONDA CONDIZIONE: C appartiene all'asse a:

$$- \frac{a}{2} - \left(- \frac{b}{2} \right) - 1 = 0$$
$$- a + b - 2 = 0$$
$$a - b - 2 = 0$$

Poiché tali condizioni devono essere soddisfatte contemporaneamente, le mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} a - 2b - 4 = 0 \\ a - b + 2 = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzione la coppia $\begin{cases} a = -8 \\ b = -6 \end{cases}$

Perciò il centro C della circonferenza richiesta avrà coordinate(4 , 3).
Il raggio r del circonferenza richiesta sarà:

$$r = \overline{CA} = \overline{CB} = \sqrt{(4+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

per trovare l'equazione della circonferenza richiesta, sfruttiamo la forma cartesiana ed avremo:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$
$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 - 25 = 0$$
$$\gamma) : x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$$

Tale equazione è, naturalmente, del tutto identica a quella trovata seguendo lo svolgimento n°1.

❖ POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO AD UNA CIRCONFERENZA:

Una retta $s) : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ rispetto ad una circonferenza $\gamma) : x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ può assumere tre differenti posizioni:

1. Se la **RETTA** è **ESTERNA** alla circonferenza (vedi figura sottostante), sono evidenti due proprietà:
   - **La retta e la circonferenza non hanno alcun punto in comune.**

     Si può dimostrare, infatti, che il sistema:

     $$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

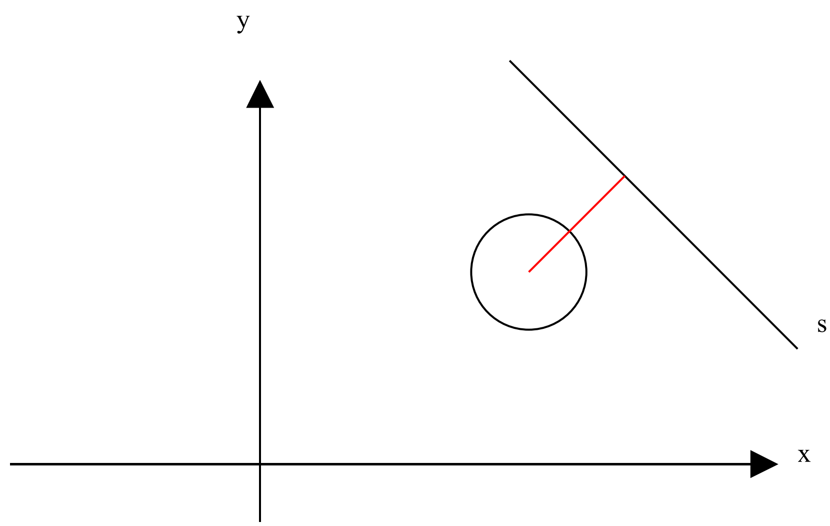
     (formato, cioè dalle equazioni della circonferenza e della retta in questione) non ammette soluzioni reali.
   - **La distanza dal centro della circonferenza alla retta s è maggiore del raggio della circonferenza.**

     $$C\left(- \frac{a}{2}, - \frac{b}{2} \right)$$

$$d = \frac{\left| a_2\left(-\frac{a_1}{2}\right) + b_2\left(-\frac{b_1}{2}\right) + c_2 \right|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$ [8]

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b_1}{2}\right)^2 - c_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\left| a_2\left(-\frac{a_1}{2}\right) + b_2\left(-\frac{b_1}{2}\right) + c_2 \right|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} > \sqrt{\left(-\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b_1}{2}\right)^2 - c_1}$$



2. Se la **RETTA** è **TANGENTE** alla circonferenza (vedi figura seguente), sono evidenti due proprietà:
   - **La retta e la circonferenza hanno un solo punto di intersezione.**

     Si può dimostrare, infatti, che il sistema:

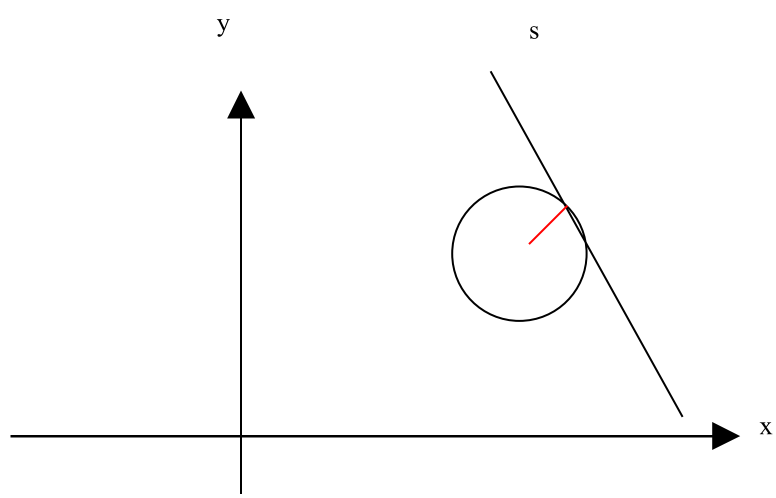
     $$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

     (formato, cioè dalle equazioni della circonferenza e della retta in questione) ha una sola soluzione reale.

[8] Formula della distanza di un punto da una retta.

- **La distanza dal centro C della circonferenza alla retta s è uguale al raggio della circonferenza.**

$$\Rightarrow \frac{\left| a_2\left(-\frac{a_1}{2}\right) + b_2\left(-\frac{b_1}{2}\right) + c_2 \right|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \sqrt{\left(-\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b_1}{2}\right)^2 - c_1}$$



3. Se la **RETTA** è **SECANTE** la circonferenza (vedi figura sottostante), sono evidenti due proprietà:

- **La retta e la circonferenza hanno due punti in comune.**

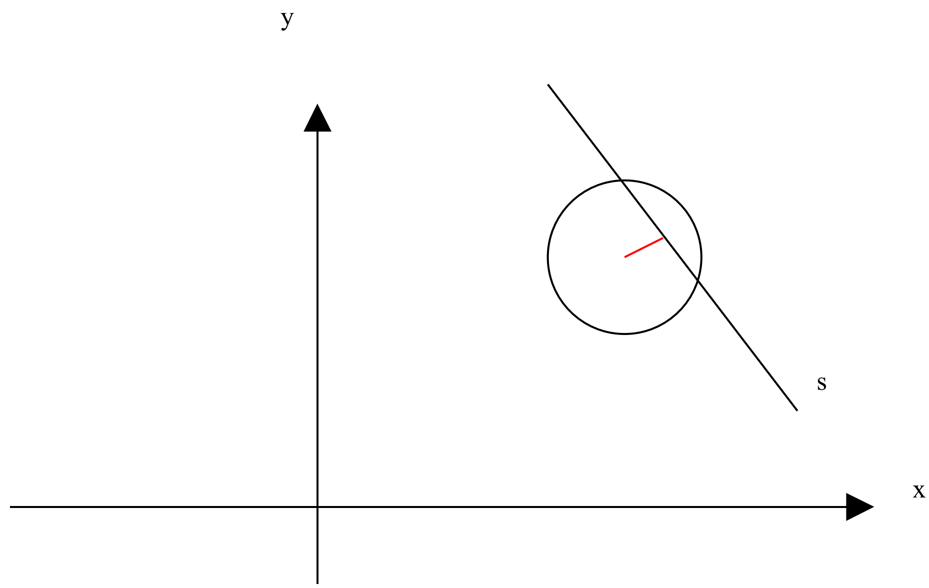
  Si può dimostrare, infatti, che il sistema:

  $$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

  (formato, cioè dalle equazioni della circonferenza e della retta in questione) ammette due soluzioni reali.

- **La distanza dal centro della circonferenza alla retta s è minore del raggio della circonferenza.**

$$\Rightarrow \frac{\left| a_2\left(-\frac{a_1}{2}\right) + b_2\left(-\frac{b_1}{2}\right) + c_2 \right|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} < \sqrt{\left(-\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b_1}{2}\right)^2 - c_1}$$



ESERCIZIO N°10:

Determinare la posizione della retta *s):x+2y-4=0* rispetto alla circonferenza *γ): $x^2+y^2-4x=0$*.

SVOLGIMENTO N°1:

Studiamo le eventuali intersezioni tra s e γ:

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x^2+y^2-4x=0 \end{cases}$$

Tale equazione ammette come soluzioni:

$$\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{8}{5} \end{cases}$$

Perciò la retta s e la circonferenza γ avranno in comune i punti $P(4,0)$ e $Q\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$; perciò la retta *s* sarà secante rispetto alla circonferenza *γ*.

SVOLGIMENTO N°2:

Confronto la distanza dal centro della circonferenza alla retta s con il raggio della circonferenza.

$C(2,0)$

$r=\sqrt{4+0-0}=2$

$d=\frac{|2+2(0)-4|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|-2|}{\sqrt{5}}\cong 0.89$

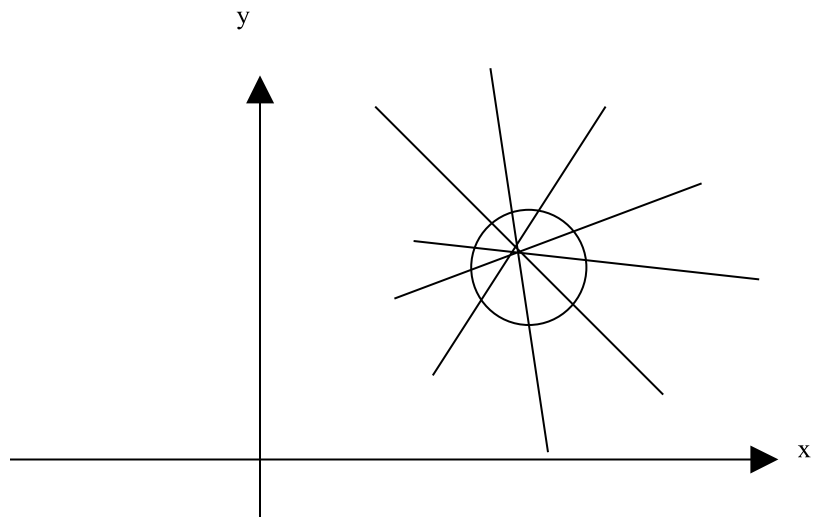
Poiché $d<r$, avremo che la retta s sarà secante la circonferenza *γ*.

❖ RETTE TANGENTI AD UNA CIRCONFERENZA:

Dato un punto $P(x_0,y_0)$ ed una circonferenza $\gamma):x^2+y^2+ax+by+c=0$, per studiare le tangenti condotte da P a γ dobbiamo distinguere tre casi:

1. **P è INTERNO a γ**:

   Dal grafico sottostante risulta evidente che ogni retta condotta P è per γ una retta secante, perciò non esisterà nessuna retta condotta da P e tangente alla circonferenza.



2. **P appartiene alla circonferenza γ:**

   In questo caso (e ciò è noto dalla geometria piana) possiamo condurre sola retta t tangente in P a γ; l'equazione di tale retta può essere trovata in due modi (del tutto equivalenti):

   <u>**1° modo:**</u> Sappiamo che la tangente ad una circonferenza in un punto è perpendicolare al raggio condotto per il punto di tangenza. Pertanto, la tangente t sarà la retta passante per P e perpendicolare al raggio PC:

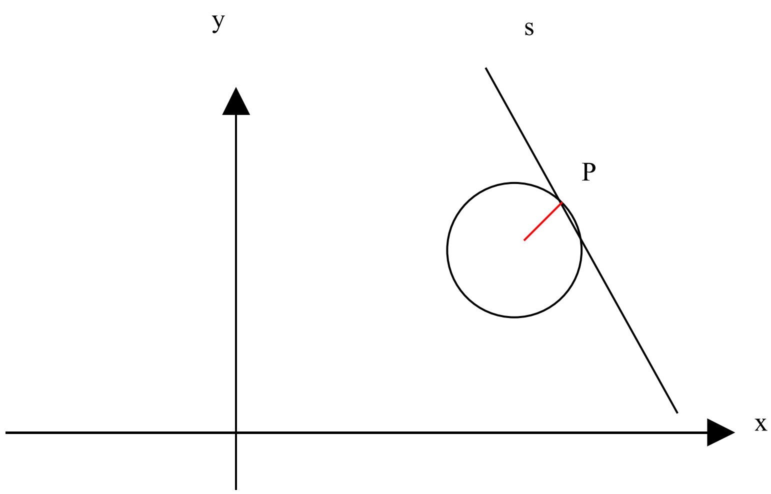
   $$t): y - y_0 = -\frac{1}{m_{PC}}(x - x_0)$$

   <u>**2° modo:**</u> Possiamo applicare la "**regola dello sdoppiamento**" ed operare, a partire dall'equazione di γ, le seguenti sostituzioni:

   $$\begin{cases} x^2 = x \cdot x_0 \\ y^2 = y \cdot y_0 \\ x = \dfrac{x + x_0}{2} \\ y = \dfrac{y + y_0}{2} \end{cases}$$

Pertanto, l'equazione della tangente t condotta dal punto p alla circonferenza γ sarà:

$$t): x \cdot x_0 + y \cdot y_0 + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0$$



ESERCIZIO N°11:

Scrivere l'equazione della retta t tangente alla circonferenza $\gamma): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ condotta dal punto P (3 , 5).

SVOLGIMENTO:

Verifico la posizione di P rispetto a γ:

$3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 5 - 20 = 0$
$9 + 25 + 6 - 20 - 20 = 0$
$0 = 0$
$\Rightarrow P \in \gamma$

PROCEDIMENTO NUMERO 1:

Dall'equazione di γ ricavo le coordinate del suo centro C:

$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \equiv (-1,2)$

$m_{PC} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \frac{5-2}{3+1} = \frac{3}{4}$

$t): y - y_P = -\frac{1}{m_{PC}}(x - x_P)$

$y - 5 = -\frac{4}{3}(x-3)$

$y - 5 = -\frac{4}{3}x + 4$

$3y - 15 = -4x + 12$

$t): 4x + 3y - 27 = 0$

PROCEDIMENTO N°2:

Applico la regola dello sdoppiamento:

$$t): x \cdot x_0 + y \cdot y_0 + a\frac{x+x_0}{2} + b\frac{y+y_0}{2} + c = 0$$
$$x \cdot 3 + y \cdot 5 + 2\frac{x+3}{2} - 4\frac{y+5}{2} - 20 = 0$$
$$3x + 5y + x + 3 - 2y - 10 - 20 = 0$$
$$t): 4x + 3y - 27 = 0$$

3. P è esterno alla circonferenza γ:

In questo caso sappiamo che da un punto esterno ad una circonferenza possiamo condurre due rette tangenti e che i segmenti di tangenza sono uguali fra loro. Per trovare le equazioni di tali tangenti si può procedere in due modi del tutto equivalenti:

<u>1° modo:</u>

- Si calcola l'equazione della generica retta condotta da P:

  $t): y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ **(*)**
- Si mette a sistema tale equazione con quella di γ:

  $$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \end{cases}$$
- Nell'equazione risolvente di tale sistema si impone la cosiddetta "*condizione di tangenza*", cioè si impone Δ=0 (oppure, quando è possibile, $\frac{\Delta}{4} = 0$) ;
- Così facendo si ottiene un'equazione nella variabile m che dovrà ammettere due soluzioni reali;
- Sostituendo tali valori di m nell'equazione (*) della retta t, si ottengono le equazioni delle due rette tangenti a γ condotte da P.

<u>2° modo:</u>

- Si calcola l'equazione della generica retta t condotta da P (*);
- Si impone che la distanza dal centro C a tale retta sia uguale al raggio di tale circonferenza;
- Si ottiene un'equazione nella variabile m che dovrà ammettere due soluzioni reali;
- Sostituendo tali valori di m nell'equazione (*) della retta t, si ottengono le equazioni delle due rette tangenti a γ condotte da P.

<u>ESERCIZIO NUMERO 12:</u>

Scrivere le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $\gamma): 5x^2 + 5y^2 - 10x - 10y + 1 = 0$ condotte dal punto P(-2 , -2).

<u>SVOLGIMENTO:</u>

Verifichiamo la posizione di P rispetto alla circonferenza γ:

$$5(-2)^2+5(-2)^2-10(-2)-10(-2)+1=0$$
$$20+20+20+20+1=0$$
$$81>0$$
$$P\notin\gamma$$

P è esterno a γ.

PROCEDIMENTO NUMERO 1:

L'equazione della generica retta t passante per P è:

$$t):y+2=m\cdot(x+2)$$
$$t):y=mx+2m-2 \qquad (*)$$

Interseco tale retta con la circonferenza γ:

$$\begin{cases}5x^2+5y^2-10x-10y+1=0\\ y=mx+2m-2\end{cases}$$

L'equazione risolvente di tale sistema è:

$$5(1+m^2)x^2+10(2m^2-3m-1)x+(20m^2-60m+41)=0$$

Imponendo la condizione di tangenza ($\frac{\Delta}{4}=0$), otteniamo:

$$25(2m^2-3m-1)^2-5(1+m^2)\cdot(20m^2-60m+41)=0$$

che ammette come soluzioni: m= ½ e m=2.

Sostituiamo tali valori nella (*) ed atteniamo:

$$t_1):y=\frac{1}{2}x+2\cdot\frac{1}{2}-2;$$
$$t_1):y=\frac{1}{2}x-1$$

(Equazione della prima tangente – per m=1/2-)

$$t_2):y=2x+4-2$$
$$t_2):y=2x+2$$

(Equazione della seconda tangente – per m=2 -) .

PROCEDIMENTO NUMERO 2:

Dall'equazione di γ calcoliamo il centro ed il raggio della circonferenza:

$$C(1,1)$$
$$r=\sqrt{1+1-\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{5+5-1}{5}}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

calcoliamo la distanza d dal centro C alla generica retta (*) t passante per P:

$$t)mx-y+(2m-2)=0$$
$$d=\frac{|m-1+2m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|3m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$$

Imponiamo che tale distanza sia uguale al raggio della circonferenza:

$$\frac{|3m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Si calcola facilmente che le soluzioni di tale equazione sono: m=1/2 e m=2 (così come avevamo trovato seguendo lo svolgimento n°1); perciò le rette tangenti a γ condotte dal punto p sono:

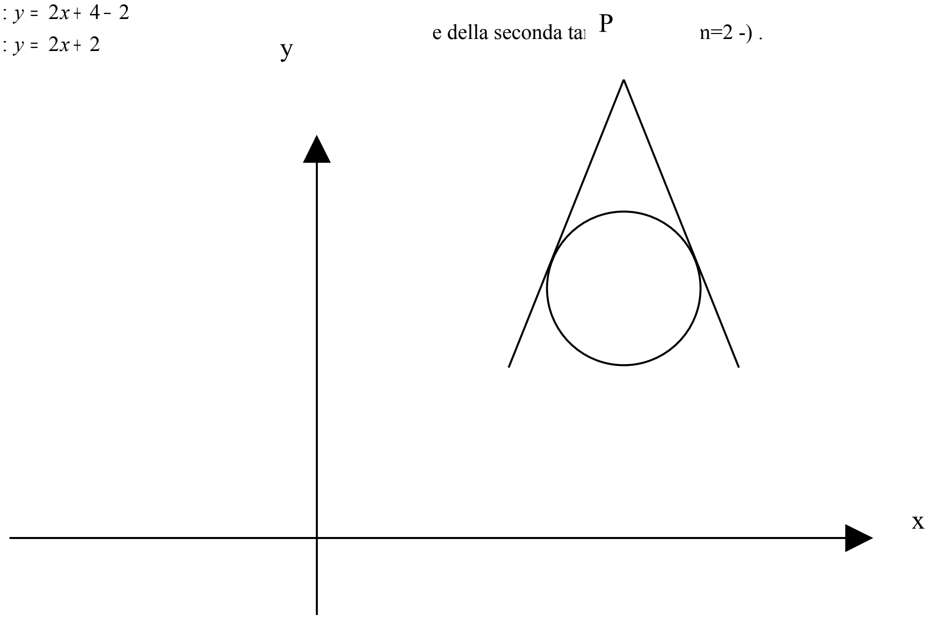
$$t_1):y=\frac{1}{2}x+2\cdot\frac{1}{2}-2;$$
$$t_1):y=\frac{1}{2}x-1$$

(Equazione della prima tangente – per m=1/2-)

$t_2) : y = 2x + 4 - 2$

$t_2) : y = 2x + 2$

e della seconda ta n=2 -) .



<u>N. B.:</u>

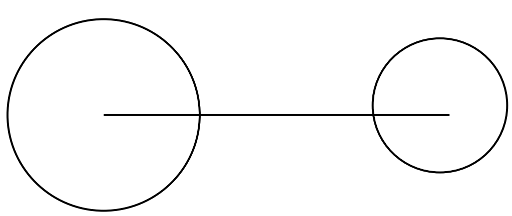
Se il punto P è esterno alla circonferenza γ, per trovare l'equazione delle tangenti a tale circonferenza condotte da P non è possibile applicare la regola dello sdoppiamento. In questo caso, infatti, l'equazione della retta trovata applicando la suddetta regola non rappresenta alcuna delle rette tangenti, ma rappresenta l'equazione della retta r congiungente i punti di tangenza.

❖ POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE CIRCONFERENZE:

La posizione reciproca di due circonferenze nel piano dipende dalla distanza tra i loro centri C e C'; in particolare, indicando con r ed r' i raggi delle due circonferenze (supponendo che r ≥ r'), si ha che:

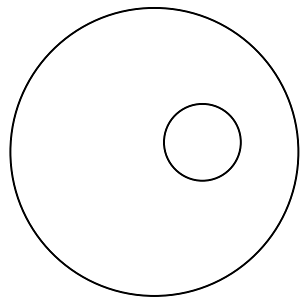
- **Se d > r + r':**

  le circonferenze sono esterne l'una all'altra e, pertanto, non avranno punti di intersezione:



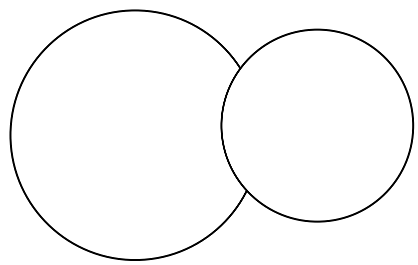
- **Se d < r - r':**

Le circonferenze sono interne l’una all’altra.



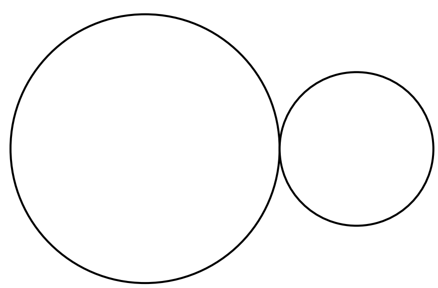
- **Se d < r + r’ e d > r - r’:**

  Le circonferenze sono secanti e si intersecano in due punti distinti.



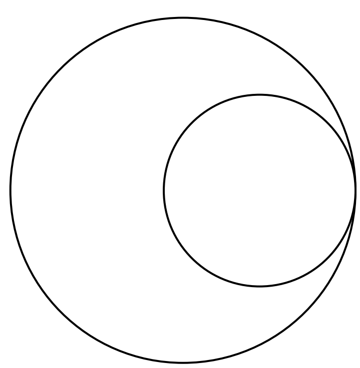
- **Se d =r + r’:**

  Le circonferenze sono tangenti esternamente ed avranno un punto in comune.



- **Se d = r - r’:**

  Le circonferenze sono tangenti internamente ed avranno (anche in questo caso) un punto in comune.



Dal punto di vista analitico, determinare la posizione reciproca di due circonferenze è, dunque, semplice: basta calcolare la distanza fra i loro centri e stabilire che relazione esiste con la somma o la differenza dei rispettivi raggi.

ESERCIZIO NUMERO 13:

Stabilire la posizione reciproca delle circonferenze $\gamma_1).x^2+y^2-2x+4y-1=0$ e $\gamma_2):x^2+y^2+6x-2y+6=0$.

SVOLGIMENTO:

Calocliamo le coordinate dei centri e le lunghezze dei raggi delle due circonferenze:

$C_1(1,-2)$

$r_1=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

$C_2(-3,1)$

$r_2=\sqrt{9+1-6}=\sqrt{4}=2$

$\overline{C_1C_2}=\sqrt{(-3-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$r_1+r_2=\sqrt{6}+2\cong 4.45$

$r_1-r_2=\sqrt{6}-2\cong 0.45$

$\overline{C_1C_2}>r_1+r_2$

Perciò γ_1 e γ_2 sono l'una esterna all'altra.

Nel caso in cui due circonferenze hanno due punti in comune, la retta che congiunge tali punti viene chiamata "***asse radicale***" e si può facilmente verificare che tale retta è perpendicolare alla retta congiungente i centri di tali circonferenze[9].

Anche quando le due circonferenze sono tangenti esiste l'asse radicale; in questo caso esso è la retta tangente ad entrambe le circonferenze e passante per il punto di tangenza. Se le due circonferenze sono esterne, l'asse radicale eè la retta che si ottiene risolvendo per riduzione (sottrazione) il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze.

ESERCIZIO NUMERO 14:

$\gamma_1):x^2+y^2=1$

$\gamma_2):x^2+y^2-6x+4y+9=0$

$C_1(0,0)$

$C_2(3,-2)$

$r_1=1$

$r_2=\sqrt{9+4-9}=2$

$\overline{C_1C_2}=\sqrt{(3-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{13}\cong 3.61$

$r_1+r_2=1+2=3$

$r_2-r_1=1$

$\overline{C_1C_2}>r_1+r_2$

Perciò γ_1 e γ_2 sono l'una esterna all'altra.

Mettendo a sistema le equazioni delle due circonferenze:

[9] Retta che viene definita "***asse centrale***"

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y = -9 \end{cases}$$

// // -6x+4y-10=0

ossia : 3x-2y+5=0, che è l'equazione dell'asse radicale.

N. B.:

L'unico caso in cui non si riesce a trovare l'equazione dell'asse radicale è quello in cui le due circonferenze sono concentriche.

ESERCIZIO NUMERO 15:

$\gamma_1) : x^2 + y^2 - 6x + 2y - 4 = 0$

$C_1(3,-1)$

$\gamma_2) : x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$

$C_2(3,-1) \equiv C_1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$$

// // // // +6=0

Si vede bene che tale equazione non rappresenta una retta.

❖ FASCI DI CIRCONFERENZE:

Siano:

$\gamma_1): x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$

$\gamma_2): x^2+y^2+a_2x+b_2+c_2=0$

due circonferenze distinte e siano λ e μ due parametri[10] non contemporaneamente nulli.

Facciamo una combinazione lineare [11] delle equazioni di γ_1 e γ_2, otterremo:

$\lambda\,(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1)+ \mu\,(x^2+y^2+a_2x+b_2+c_2) =0$

$\lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda a_1 x + \lambda b_1 y + \lambda c_1 + \mu x^2 + \mu y^2 + \mu a_2 x + \mu b_2 y + \mu c_2 = 0$

$\gamma) : (\lambda + \mu)x^2 + (\lambda + \mu)y^2 + (\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + (\lambda c_1 + \mu c_2) = 0$

Se $\lambda + \mu \neq 0$, tale equazione rappresenta una circonferenza; al variare di λ e μ si otterrà un fascio di circonferenze di generatrici γ_1 e γ_2. In particolare:

- ► Se $\lambda \neq 0$ e $\mu = 0$, avremo che γ *coincide con* γ_1*;*
- ► Se $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$, avremo che γ *coincide con* γ_2*;*
- ► Se supponiamo che $\lambda \neq 0$ e poniamo $\frac{\mu}{\lambda} = k$, l'equazione di γ diventa:

[10] Parametro = quantità variabile.

[11] Che, in seguito, indicheremo con c. l.

$$(1+k)x^2+(1+k)y^2+(a_1+ka_2)x+(b_1+kb_2)y+(c_1+kc_2)=0$$

con k $\neq$ -1.

Quest'ultima formulazione dell'equazione di γ rappresenta, al variare di k, tutte le circonferenze del fascio generato da γ_1 e γ_2, tranne la circonferenza γ_2 (che si otteneva per $\lambda = 0$), mentre la circonferenza γ_1 si ottiene per k = 0.

Si possono, adesso, presentare **QUATTRO DIVERSI CASI**:

PRIMO CASO:

Le circonferenze γ_1 e γ_2, generatrici del fascio, sono secanti.

Se A e B sono i punti che esse hanno in comune, tutte le circonferenze del fascio passeranno per A e per B, che, pertanto, verranno chiamati **"punti base del fascio"**.

La retta congiungente tali punti viene detta **"asse radicale"** e può essere considerata una circonferenza degenere (di raggio infinito).

ESERCIZIO NUMERO 16:

Dati i punti A(-1 , 0) e B(3 , 0), scrivere l'equazione del fascio di circonferenze di punti base A e B.

SVOLGIMENTO:

Basta individuare due particolari circonferenze del fascio (passanti per A e per B) e mettere le loro equazioni a c. l.

La prima circonferenza del fascio (che chiameremo γ_1) sarà quella avente il segmento AB come diametro; perciò, facendo gli opportuni calcoli, avremo:

$\gamma_1): x^2+y^2-2x-3=0$

la seconda circonferenza del fascio (che chiameremo γ_2) sarà la circonferenza degenere, cioè l'asse radicale:

AB): y = 0.

L'equazione del fascio, pertanto, sarà:

$\gamma): \gamma_1+k\gamma_2=0$

$x^2+y^2-2x-3+k(y)=0$

$x^2+y^2-2x+ky-3=0$

ESERCIZIO NUMERO 17:

Dato il fascio di circonferenze: $\gamma): x^2+y^2+(k+2)x+3ky-k-1=0$, determinare gli eventuali punti base.

SVOLGIMENTO:

$x^2+y^2+(k+2)x+3ky-k-1=0$

$x^2+y^2+kx-2x+3ky-k-1=0$

$x^2+y^2-2x-1+k(x+3y-1)=0$

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-1=0 \\ x+3y-1=0 \end{cases}$$

La prima equazione di tale sistema rappresenta una circonferenza del fascio, la seconda equazione rappresenta l'asse radicale.

Risolvendo tale sistema si ottengono le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} x = \frac{5+3\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5-3\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Avremo:

$$A\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$B\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

che saranno i punti base del fascio.

SECONDO CASO:

Le circonferenze γ_1 e γ_2, generatrici del fascio, sono tangenti in un punto A.

Ciò significa che esse hanno in A la stessa retta tangente t (che sarà l'**asse radicale del fascio**). Il fascio γ generato da γ_1 e γ_2 è costituito da tutte le circonferenze passanti per A e tangenti in A alla retta t. Il punto A è detto "**punto base del fascio**".

ESERCIZIO NUMERO 18:

Studiare il fascio di circonferenze di equazione: $\gamma): x^2 + y^2 - 3(2-k)x + 4ky - 16 - 34k = 0$.

SVOLGIMENTO:

$$\gamma): x^2 + y^2 - 3(2-k)x + 4ky - 16 - 34k = 0$$

Sviluppando tale equazione e raccogliendo successivamente i termini con il parametro otteniamo:

$$x^2 + y^2 - 6x + 3kx + 4ky - 16 - 34k = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 16 + k(3x + 4y - 34) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ 3x + 4y - 34 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione di tale sistema rappresenta una circonferenza del fascio, la seconda equazione rappresenta l'asse radicale.

La soluzione di tale sistema è:

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

Quindi A(6 , 4) è il punto base del fascio e la retta r):3x+4y-34=0 è tangente in A alla circonferenza γ_1): $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$.

L'equazione data rappresenta un fascio di circonferenze tangenti in A alla retta r; i centri di tali circonferenze appartengono tutti alla retta CA.

N. B.:

Il fascio delle circonferenze tangenti ad una retta data r in un suo punto A si può scrivere combinando l'equazione di una qualsiasi circonferenza tangente in A alla retta r con quella della retta r. In questo caso, Se $A(x_0 , y_0)$ e se r): ax+by+c = 0, allora si dimostra che l'equazione del fascio sarà:

$$\gamma): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + k(ax + by + c) = 0$$

TERZO CASO:

Le circonferenze γ_1 e γ_2, generatrici del fascio, sono concentriche. Perciò le loro equazioni saranno:

$\gamma_1): x^2 + y^2 + ax + by + c_1 = 0$

$\gamma_2): x^2 + y^2 + ax + by + c_2 = 0$

L'equazione del fascio sarà data da una c. l. delle loro due equazioni:

$\gamma): x^2 + y^2 + ax + by + c_1 + k\left(x^2 + y^2 + ax + by + c_2\right) = 0$

$x^2 + y^2 + ax + by + c_1 + kx^2 + ky^2 + kax + kby + kc_2 = 0$

$(1+k)x^2 + (1+k)y^2 + a(1+k)x + b(1+k)y + (c_1 + kc_2) = 0$

Per k $\neq$ -1, dividendo ogni termine per (k + 1), otteniamo:

$$\gamma): x^2 + y^2 + ax + by + \frac{c_1 + kc_2}{1+k} = 0$$

Tale equazione rappresenta ancora una circonferenza concentrica a γ_1 e γ_2; quindi tutte le circonferenze del fascio hanno lo stesso centro di γ_1 e γ_2.

QUARTO CASO:

γ_1 e γ_2 sono due circonferenze non aventi punti in comune non sono concentriche.

Il fascio di circonferenze da esse generato si ottiene come c. l. delle loro equazioni ed è costituito da circonferenze non aventi punti in comune (e, quindi, non avente punti base) e non concentriche.